

NAIL062 V&P Logika: 1. cvičení

Témata: Úvod. Vyjadřování různých vlastností ve výrokové a predikátové logice. Připomenutí matematických pojmů.

Příklad 1. Ztratili jsme se v labyrintu a před námi jsou troje dveře: červené, zelené a modré. Víme, že za právě jedněmi dveřmi je cesta ven, za ostatními je drak. Na dveřích jsou nápisy:

- Červené dveře: “*Cesta ven je za těmito dveřmi.*”
- Modré dveře: “*Cesta ven není za těmito dveřmi.*”
- Zelené dveře: “*Cesta ven není za modrými dveřmi.*”

Víme, že alespoň jeden z nápisů je pravdivý a alespoň jeden je lživý. Formalizujte naše znalosti. Určete, za kterými dveřmi je cesta ven.

Příklad 2. Víme, že:

- *Každý zná sám sebe.*
- *Když člověk studuje na škole, musel se na ni hlásit a ta škola ho přijala.*
- *Alfons se nehlásil na školu, která přijala někoho, kdo Alfonse zná.*

Formalizujte naše znalosti. (Uměli byste ukázat, že “*Alfons nestuduje na žádné škole.*”?)

Příklad 3. Mějme daný graf G (neorientovaný, bez smyček) a dva jeho vrcholy u, v . Formalizujte následující vlastnosti ve výrokové logice:

- G je bipartitní,
- G má perfektní párování,
- u a v leží v jedné komponentě souvislosti,
- G je souvislý.

Příklad 4. Najděte formule v predikátové logice v jazyce grafů, které v *teorii grafů* (neorientovaných, bez smyček) vyjadřují následující vlastnosti. Kdy to lze v logice prvního řádu, a kdy je třeba logika druhého řádu?

- graf obsahuje vrchol stupně 1
- graf je regulární stupně 3,
- graf obsahuje k -kliku (pro nějaké fixní k),

- (d) existuje cesta délky k z vrcholu u do vrcholu v (pro nějaké fixní k),
- (e) vrcholy u a v mají alespoň jednoho společného souseda,
- (f) graf je bipartitní,
- (g) graf má perfektní párování,
- (h) vrcholy u a v leží v jedné komponentě souvislosti,
- (i) graf je souvislý.

Příklad 5. Najděte formule prvního řádu vyjadřující následující vlastnosti v jazyce uspořádaných množin:

- (a) x je nejmenší prvek,
- (b) x je minimální prvek,
- (c) x má bezprostředního následníka,
- (d) každé dva prvky mají největšího společného předchůdce.

Příklad 6. Najděte formule prvního řádu (v jazyce rovnosti), které vyjadřují pro dané $k > 0$, že existuje (a) alespoň k prvků, (b) nejvýše k prvků, (c) právě k prvků.

Příklad 7. Vyjádřete v logice prvního řádu v jazyce s jedním unárním funkčním symbolem f , že funkce je (a) prostá, (b) na, (c) bijekce.

Příklad 8. Vyjádřete v logice druhého řádu, že daná binární relace je

- (a) (unární) funkce,
- (b) prostá funkce,
- (c) funkce na,
- (d) bijekce (vyjádřete tak, že k ní existuje inverzní funkce).

Příklad 9. Lze \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{R} a \mathbb{C} rozlišit pomocí vlastností prvního řádu

- (a) v jazyce uspořádaných množin?
- (b) v jazyce těles?