

NAIL062 V&P Logika: 10. cvičení

Témata: Struktury a podstruktury. Extenze teorií, extenze o definice. Definovatelné množiny.

Příklad 1. Uvažme $\mathbb{Z}_4 = \langle \{0, 1, 2, 3\}, +, -, 0 \rangle$ kde $+$ je binární sčítání modulo 4 a $-$ je unární funkce, která vrací *inverzní* prvek $+$ vzhledem k *neutrálnímu* prvku 0.

- Je \mathbb{Z}_4 model teorie grup (tj. je to *grupa*)?
- Určete všechny podstruktury $\mathbb{Z}_4 \langle a \rangle$ generované nějakým $a \in \mathbb{Z}_4$.
- Obsahuje \mathbb{Z}_4 ještě nějaké další podstruktury?
- Je každá podstruktura \mathbb{Z}_4 modelem teorie grup?
- Je každá podstruktura \mathbb{Z}_4 elementárně ekvivalentní \mathbb{Z}_4 ?
- Je každá podstruktura *komutativní* grupy (tj. grupy, která splňuje $x + y = y + x$) také komutativní grupa?

Příklad 2. Bud' $\mathbb{Q} = \langle \mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ těleso racionálních čísel se standardními operacemi.

- Existuje redukt $\underline{\mathbb{Q}}$, který je modelem teorie grup?
- Lze redukt $\langle \mathbb{Q}, \cdot, 1 \rangle$ rozšířit na model teorie grup?
- Obsahuje $\underline{\mathbb{Q}}$ podstrukturu, která není elementárně ekvivalentní $\underline{\mathbb{Q}}$?
- Označme $Th(\underline{\mathbb{Q}})$ množinu všech sentencí pravdivých v $\underline{\mathbb{Q}}$. Je $Th(\underline{\mathbb{Q}})$ úplná teorie?

Příklad 3. Mějme teorii $T = \{x = c_1 \vee x = c_2 \vee x = c_3\}$ v jazyce $L = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$ s rovností.

- Je T (sémanticky) konzistentní?
- Jsou všechny modely T elementárně ekvivalentní? Tj. je T kompletní?
- Najděte všechny jednoduché úplné extenze T .
- Je teorie $T' = T \cup \{x = c_1 \vee x = c_4\}$ v jazyce $L = \langle c_1, c_2, c_3, c_4 \rangle$ extenzí T ? Je T' jednoduchá extenze T ? Je T' konzervativní extenze T ?

Příklad 4. Bud' $T = \{\neg E(x, x), E(x, y) \rightarrow E(y, x), (\exists x)(\exists y)(\exists z)(E(x, y) \wedge E(y, z) \wedge E(x, z) \wedge \neg(x = y \vee y = z \vee x = z)), \varphi\}$ teorie v jazyce $L = \langle E \rangle$ s rovností, kde E je binární relační symbol a φ vyjadřuje, že "existují právě čtyři prvky".

- Uvažme rozšíření $L' = \langle E, c \rangle$ jazyka o nový konstantní symbol c . Určete počet (až na ekvivalenci) teorií T' v jazyce L' , které jsou extenzemi teorie T .
- Má T nějakou *konzervativní* extenzi v jazyce L' ? Zdůvodněte.

Příklad 5. Nechť $T = \{x = f(f(x)), \varphi, c_1 \neq c_2\}$ je teorie jazyka $L = \langle f, c_1, c_2 \rangle$ s rovností, kde f je unární funkční, c_1, c_2 jsou konstantní symboly a axiom φ vyjadřuje, že "existují právě 3 prvky".

- (a) Určete, kolik má teorie T navzájem neekvivalentních jednoduchých kompletních extenzí. Napište dvě z nich.
- (b) Nechť $T' = \{x = f(f(x)), \varphi, f(c_1) \neq f(c_2)\}$ je teorie stejného jazyka, axiom φ je stejný jako výše. Je T' extenze T ? Je T extenze T' ? Pokud ano, jde o konzervativní extenzi? Uveďte zdůvodnění.

Příklad 6. Nechť $T_n = \{c_i \neq c_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ označuje teorii jazyka $L_n = \langle c_1, \dots, c_n \rangle$ s rovností, kde c_1, \dots, c_n jsou konstantní symboly.

- (a) Pro dané konečné $n \geq 1$ určete počet modelů konečné velikosti k teorie T_n až na izomorfismus. Určete počet spočetných modelů teorie T_n .
- (b) Pro jaké dvojice hodnot n a m je T_n extenzí T_m ? Pro jaké je konzervativní extenzí? Zdůvodněte.

Příklad 7. Buď T' extenze teorie $T = \{(\exists y)(x+y=0), (x+y=0) \wedge (x+z=0) \rightarrow y=z\}$ v jazyce $L = \langle +, 0, \leq \rangle$ s rovností o definice $<$ a unárního $-$ s axiomy

$$\begin{aligned} -x = y &\leftrightarrow x + y = 0 \\ x < y &\leftrightarrow x \leq y \wedge \neg(x = y) \end{aligned}$$

Najděte formule v jazyce L , které jsou ekvivalentní v T' s následujícími formulemi.

- (a) $x + (-x) = 0$
 (b) $x + (-y) < x$
 (c) $-(x + y) < -x$

Příklad 8. Mějme jazyk $L = \langle F \rangle$ s rovností, kde F je binární funkční symbol. Najděte formule definující následující množiny (bez parametrů):

- (a) interval $(0, \infty)$ v $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$ kde \cdot je násobení reálných čísel,
 (b) množina $\{(x, 1/x) \mid x \neq 0\}$ ve stejné struktuře \mathcal{A} ,
 (c) množina všech nejvýše jednoprvkových podmnožin \mathbb{N} v $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup \rangle$,
 (d) množina všech prvočísel v $\mathcal{C} = \langle \mathbb{N} \cup \{0\}, \cdot \rangle$.