NAIL062 V&P Logika: 11. cvičení

Témata: Tablo metoda v predikátové logice, jazyky s rovností. PNF a Skolemizace.

Příklad 1. Dokažte tablo metodou, že z tvrzení

- *Každý člověk je smrtelný*
- *Aristoteles je člověk*

plyne, že: *Aristoteles je smrtelný.*

Příklad 2. Předpokládejme, že:

- *Všichni viníci jsou lháři.*
- *Alespoň jeden z obviněných je také svědkem.*
- *Žádný svědek nelže.*

Dokažte tablo metodou, že: *Ne všichni obvinění jsou viníci.*

Příklad 3. Uvažte následující tvrzení:

(i) *Nula je malé číslo.*

(ii) *Číslo je malé, právě když je blízko nuly.*

(iii) *Součet dvou malých čísel je malé číslo.*

(iv) *Je-li x blízko y, potom $f(x)$ je blízko $f(y)$.*

Chceme dokázat, že platí: *(v) Jsou-li x a y malá čísla, potom $f(x+y)$ je blízko $f(0)$.*

(a) Formalizujte jako sentence $\varphi_1, \ldots, \varphi_5$ v jazyce $L = \langle M, B, f, +, 0 \rangle$ bez rovnosti.

(b) Sestrojte dokončené tablo z teorie $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ s položkou $F\varphi_5$ v kořeni.

(c) Rozhodněte, zda platí $T \models \varphi_5$, a zda platí $T \models M(f(0))$.

(d) Pokud existují, uveďte alespoň dvě kompletní jednoduché extenze teorie T.

Příklad 4. Nechť $L(x, y)$ reprezentuje *"existuje let z x do y"* a $S(x, y)$ reprezentuje *"existuje spojení z x do y"*. Předpokládejme, že

- Z Prahy lze letět do Bratislavy, Londýna a New Yorku, a z New Yorku do Paříže,
- $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \rightarrow L(y, x))$,
- $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \rightarrow S(x, y))$,

- $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(S(x,y) \wedge L(y,z) \rightarrow S(x,z))$.

Dokažte tablo metodou, že existuje spojení z Bratislavy do Paříže.

Příklad 5. Mějme teorii T^* s axiomy rovnosti. Pomocí tablo metody ukažte, že:

(a) $T^* \models x = y \ \rightarrow \ y = x$ (symetrie)

(b) $T^* \models (x = y \ \wedge \ y = z) \ \rightarrow \ x = z$ (tranzitivita)

Hint: Pro (a) použijte axiom rovnosti (iii) pro $x_1 = x$, $x_2 = x$, $y_1 = y$ a $y_2 = x$, na (b) použijte (iii) pro $x_1 = x$, $x_2 = y$, $y_1 = x$ a $y_2 = z$.

Příklad 6. Ukažme, že platí následující pravidla, kde φ a ψ jsou sentence nebo formule s volnou proměnnou x (značíme $\varphi(x)$, $\psi(x)$). Najděte tablo důkazy dané formule. (Viz převod do PNF, stejně lze dokázat i ostatní pravidla o vytýkání kvantifikátorů.)

(a) $\neg(\exists x)\varphi(x) \rightarrow (\forall x)\neg\varphi(x)$,

(b) $(\forall x)\neg\varphi(x) \rightarrow \neg(\exists x)\varphi(x)$,

(c) $(\exists x)(\varphi(x) \rightarrow \psi) \rightarrow ((\forall x)\varphi(x) \rightarrow \psi)$ kde x není volná v ψ,

(d) $((\exists x)\varphi(x) \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x)(\varphi(x) \rightarrow \psi)$ kde x není volná v ψ.

Příklad 7. Převeďte následující formule do PNF. Poté najděte jejich Skolemovy varianty.

(a) $(\forall y)((\exists x)P(x,y) \rightarrow Q(y,z)) \wedge (\exists y)((\forall x)R(x,y) \vee Q(x,y))$

(b) $(\exists x)R(x,y) \leftrightarrow (\forall y)P(x,y)$

(c) $\neg((\forall x)(\exists y)P(x,y) \rightarrow (\exists x)(\exists y)R(x,y)) \wedge (\forall x)\neg(\exists y)Q(x,y)$