NAIL062 V&P Logika: 4. cvičení

Témata: Vlastnosti a extenze teorií. Počítání výroků až na ekvivalenci (Lindenbaum-Tarského algebra). 2-SAT a implikační graf. Horn-SAT a jednotková propagace.

Příklad 1. Dokažte nebo vyvraťte (nebo uveďte správný vztah), že pro každou teorii T a výroky φ, ψ v jazyce $\mathbb{P}$ platí:

(a) $T \models \varphi$, právě když $T \not\models \neg\varphi$

(b) $T \models \varphi$ a $T \models \psi$, právě když $T \models \varphi \wedge \psi$

(c) $T \models \varphi$ nebo $T \models \psi$, právě když $T \models \varphi \vee \psi$

(d) $T \models \varphi \rightarrow \psi$ and $T \models \psi \rightarrow \chi$, právě když $T \models \varphi \rightarrow \chi$

Příklad 2. Uvažte následující dvě teorie:

(I) $T = \{p \wedge q, p \rightarrow \neg q, q\}$ v jazyce $\mathbb{P} = \{p, q\}$

(II) $T = \{(p \wedge q) \rightarrow r, \neg r \vee (p \wedge q)\}$ v jazyce $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$

(a) Rozhodněte, zda je teorie T [konzistentní/splnitelná/kompletní]. (konzistentní=bezesporná, kompletní=úplná)

(b) Uveďte příklad výroku φ, který je [platný/nesplnitelný/nezávislý] v T

(c) Uveďte příklad extenze T' teorie T (pokud existuje, a pokud možno neekvivalentní s T), která je [jednoduchá / konzervativní/kompletní/konzervativní jednoduchá/kompletní jednoduchá/kompletní konzervativní].

Příklad 3. Dokažte nebo vyvraťte (nebo uveďte správný vztah), že pro libovolné teorie T, S nad $\mathbb{P}$ platí:

(a) $S \subseteq T \Rightarrow \mathrm{Csq}(T) \subseteq \mathrm{Csq}(S)$

(b) $\mathrm{Csq}(S \cup T) = \mathrm{Csq}(S) \cup \mathrm{Csq}(T)$

(c) $\mathrm{Csq}(S \cap T) = \mathrm{Csq}(S) \cap \mathrm{Csq}(T)$

Příklad 4. Nechť $|\mathbb{P}| = n$ a mějme výrok $\varphi \in \mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$ takový, že $|M(\varphi)| = k$. Určete počet až na ekvivalenci:

(a) výroků ψ takových, že $\varphi \models \psi$ nebo $\psi \models \varphi$,

(b) teorií nad $\mathbb{P}$, ve kterých platí φ,

(c) úplných teorií nad $\mathbb{P}$ ve kterých platí φ,

(d) teorií T nad $\mathbb{P}$ takových, že $T \cup \{\varphi\}$ je bezesporná.

Uvažme navíc spornou teorii $\{\varphi, \psi\}$ kde $|M(\psi)| = p$. Spočtěte až na ekvivalenci:

(e) výroky χ takové, že $\varphi \vee \psi \models \chi$,

(f) teorie, ve kterých platí $\varphi \vee \psi$.

Příklad 5. Pro danou formuli φ v CNF najděte a 3-CNF formuli φ' takovou, že φ' je splnitelná, právě když φ je splnitelná. Popište efektivní algoritmus konstrukce φ' je-li dána φ (tj. redukci z problému SAT do problému 3-SAT).

Příklad 6. Sestrojte implikační graf daného 2-CNF výroku. Je splnitelný? Pokud ano, najděte nějaké řešení.

(a) $(p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_1) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge (p_4 \vee p_5) \wedge (\neg p_5 \vee \neg p_1)$

(b) $(p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_3 \vee p_1) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge (p_4 \vee p_5) \wedge (\neg p_5 \vee p_1)$

(c) $(p_0 \vee p_2) \wedge (p_0 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_4) \wedge (p_2 \vee \neg p_4) \wedge (p_0 \vee \neg p_5) \wedge (p_1 \vee \neg p_5) \wedge$
$(p_2 \vee \neg p_5) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_6) \wedge (p_4 \vee p_6) \wedge (p_5 \vee p_6) \wedge p_1 \wedge \neg p_7$

Příklad 7. Pomocí jednotkové propagace zjistěte, zda je následující Hornův výrok splnitelný. Pokud ano, najděte nějaké splňující ohodnocení.

$$(\neg p_1 \vee \neg p_3 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \wedge p_1 \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge$$
$$(\neg p_2 \vee \neg p_4 \vee p_1) \wedge (\neg p_4 \vee \neg p_3 \vee \neg p_2) \wedge (p_4 \vee \neg p_5 \vee \neg p_6)$$