

Identifikace modelu.

Jak po danou časovou řadu najít odpovídající model?

Předpokládáme, že řada je stacionární.

- 1) Pořídíme grafický náčrt časové řady, zkontrolujeme, zda je stacionární.
- 2) Nijádným statistickým testem ověříme, zda řada má nulovou střední hodnotu - pokud ne, řadu vycentrujeme (odečtením průměru)
- 3) Pořídíme autokorelační fce (případně parciální autokorelační fce) a makemim si ho. Platí:

• $MA(q)$: $\rho_k = 0$ pro $k > q$ ($k_0 = q$ je identifikační bod)

• $AR(p)$: identifikační bod neexistuje, ρ_k ve tvaru U

• $ARMA(p, q)$: identifikační bod neexistuje, ρ_k ve tvaru U
po prvních $q-p$ hodnotách.

účtí charakteristické vlastnosti má i parciální autokorelační fce ρ_{kk} :

• $MA(q)$: identifikační bod neexistuje, ρ_{kk} směřuje k nule U

• $AR(p)$: identifikační bod $k_0 = p$

• $ARMA(p, q)$: identifikační bod neexistuje

ρ_{kk} směřuje k nule U po prvních $p-q$ hodnotách

hůlka U je lineární kombinace klesajících geometrických

prologů a sinusoid s geometricky klesající amplitudou

Co je parciální autokorelační fce?

P_{kk} je parciální korelační koeficient y_t a y_{t+k} při pevných hodnotách

$$y_{t+1}, \dots, y_{t+k-1}$$

platí: $P_{kk} = \frac{\det P_k^*}{\det P_k}$, kde

$$P_k = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{k-2} \\ - & - & - & - \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

P_k^* vznikne z P_k nahrazením posledního řádku nultým

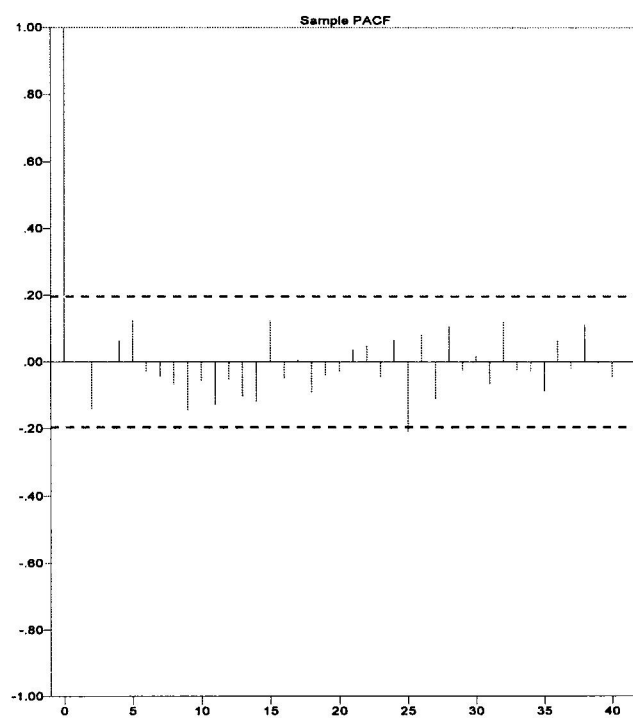
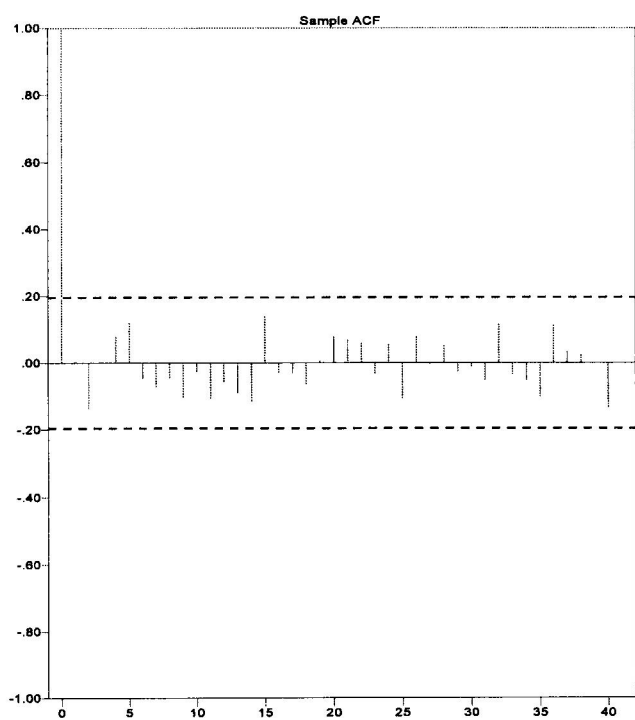
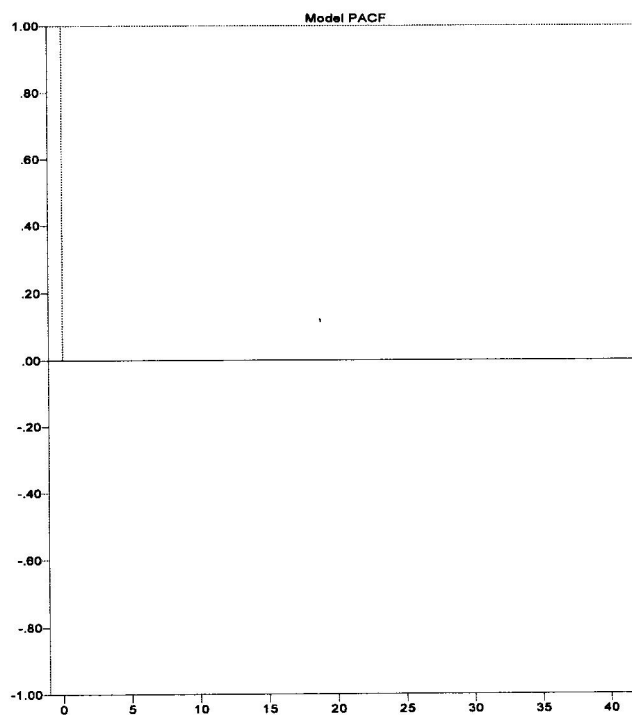
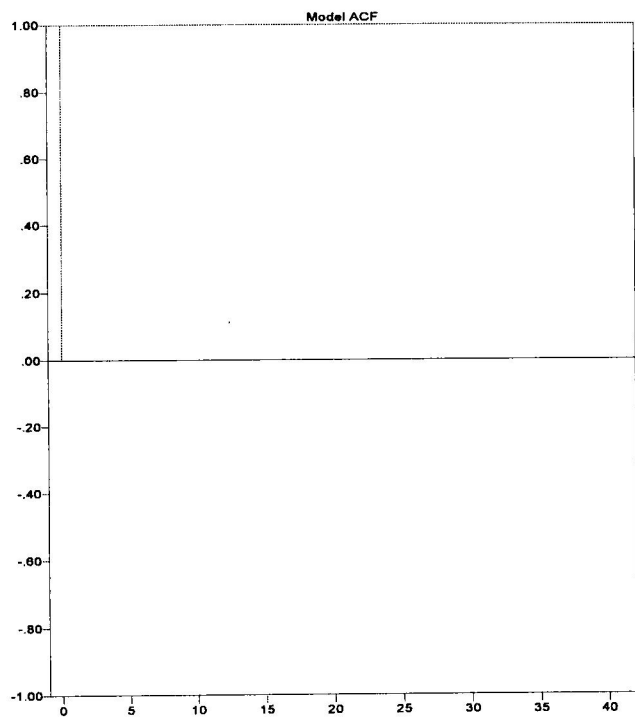
$$\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_k \end{pmatrix}$$

Odhady r_{kk} se obvykle počítají rekurentně: $r_{11} = r_1$

$$r_{kk} = \frac{r_k - \sum_{j=1}^{k-1} r_{k-1,j} r_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} r_{k-1,j} r_j} \quad \text{pro } k > 1$$

kde $r_{kj} = r_{k-1,j} - r_{kk} r_{k-1,k-j}$ pro $j = 1, 2, \dots, k-1$.

Takže podle toho odhadnutí autokorelační a parciální autokorelační fce se rozhodneme pro nějaký model a jeho řád.



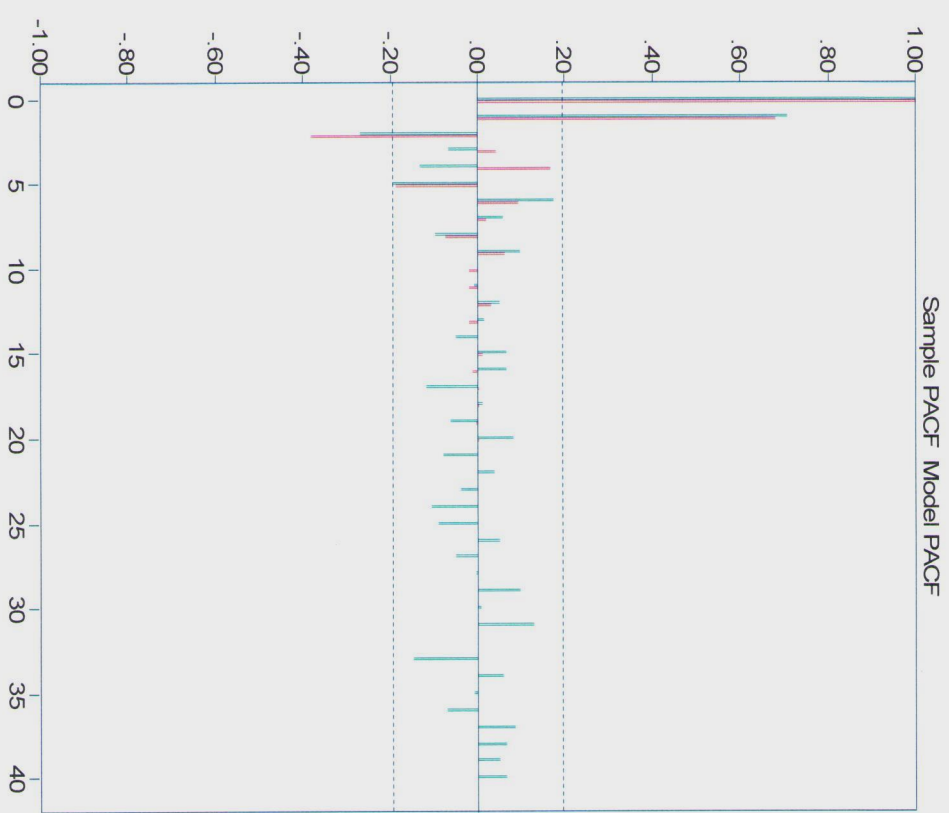
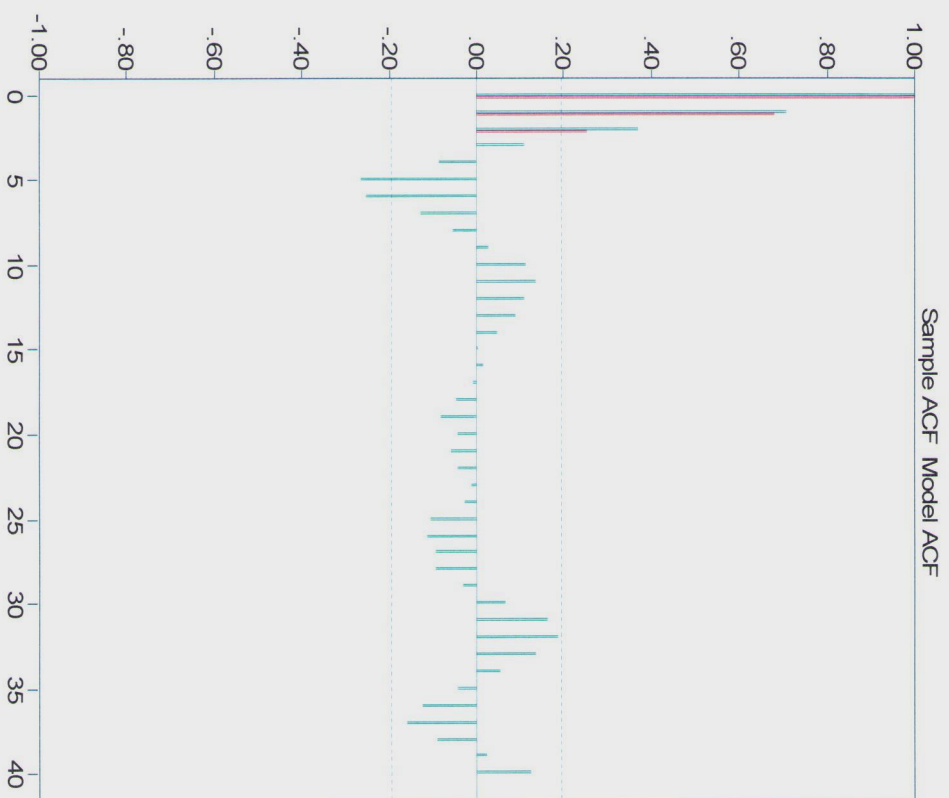
Bílý šum

autokorelační funkce (vlevo), parciální autokorelační funkce (vpravo)

nahoře - teoretická

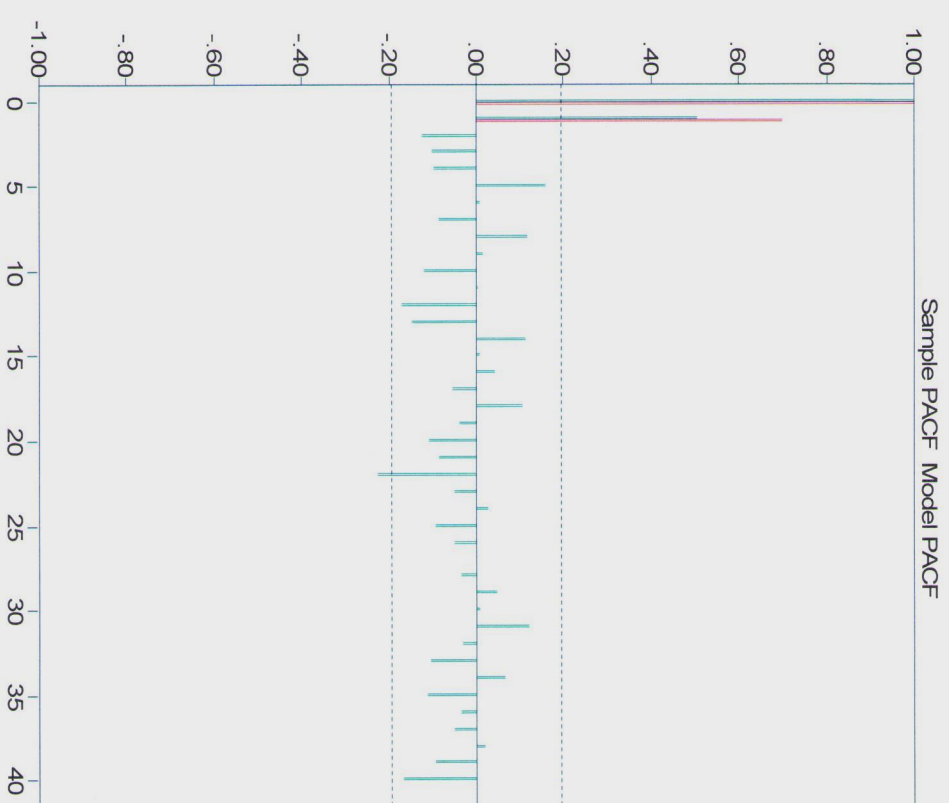
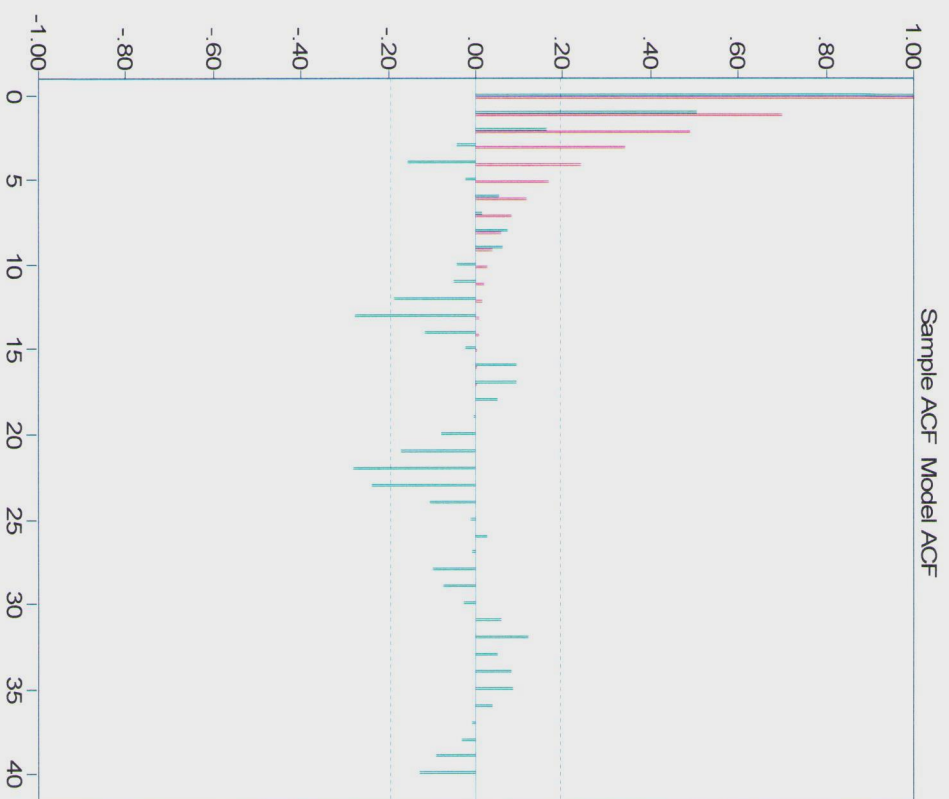
dole - výběrová (odhad spočítaný z hodnot simulovaného procesu)

Simulovaná řada MA(2): $X_t = Z_t + Z_{t-1} + 0.6 Z_{t-2}$



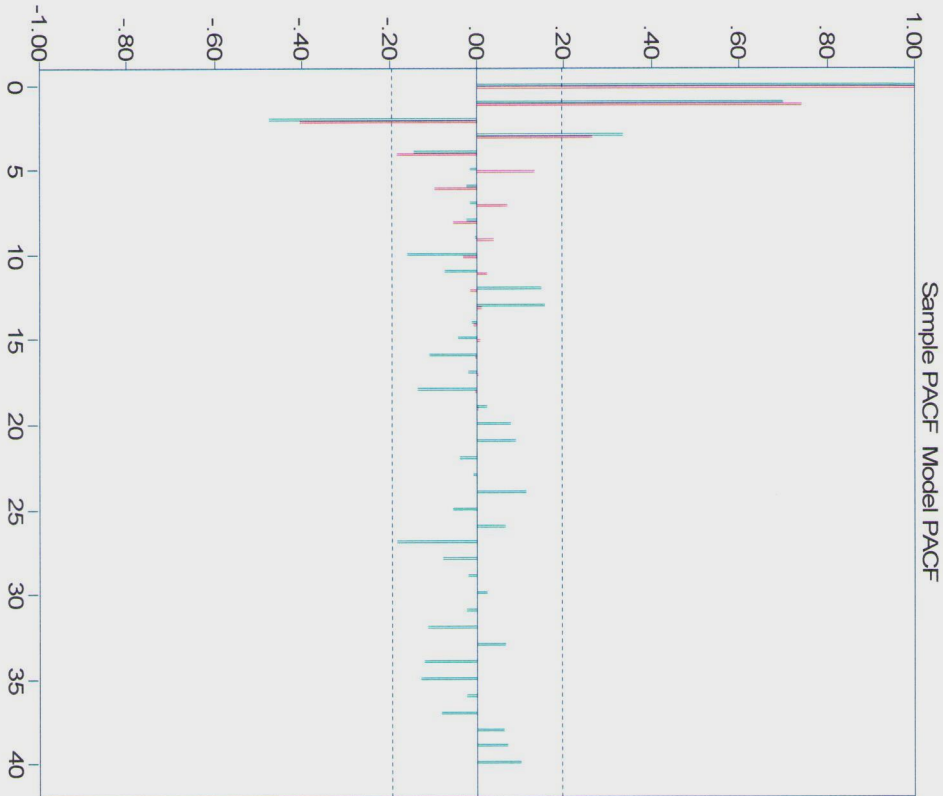
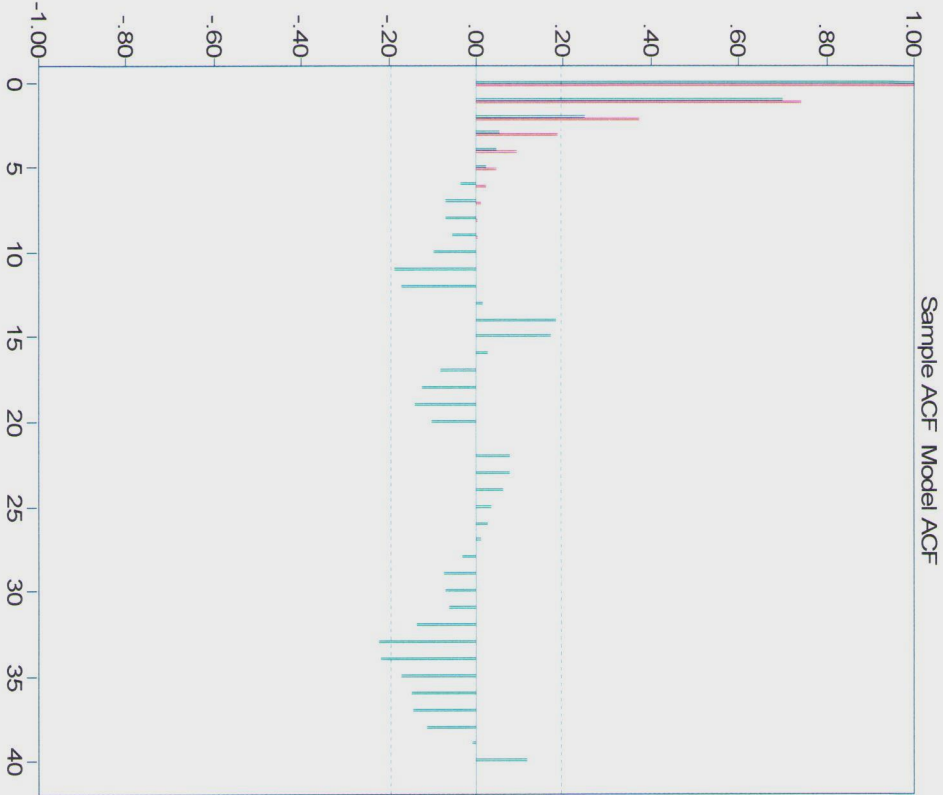
model – červená, odhad – zelená

Simulovaná řada AR(1): $X_t = 0.7 X_{t-1} + Z_t$



model – červená, odhad – zelená

Simulovaná řada ARMA(1,1): $X_t = 0.5 X_{t-1} + Z_t + 0.75 Z_{t-1}$



model – červená, odhad – zelená

4) Vě zřetěžení modelu odhadnu parametry. Metoda je mnoho.

Kruží počáteční odhady se dají dostat přímo ze znalosti pro autokorelační fci. Např. v $AR(1)$ máme $\rho_k = \varphi^k$, tedy $\rho_1 = \varphi$, a toho $\hat{\varphi} = r_1$.

Podobně v $MA(1)$ je $\rho_1 = \frac{\theta}{1+\theta^2}$, a toho $\hat{\theta} = \frac{1 - \sqrt{1-4r_1^2}}{2r_1}$ apod.

Pozor! Další významný parameter je rozptyl bílého šumu σ_ε^2 .

V $AR(1)$ je $R(0) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\varphi} \Rightarrow \sigma_\varepsilon^2 = R(0)(1-\varphi)$,

tedy $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \hat{C}_0(1-\hat{r}_1)$.

Tyto odhady se obvykle dávají jako počáteční hodnoty různých iteračních procedur.

Do se používá nějaká forma metody nejmenších čtverců, která se obvykle numericky.

5) Existují formální testy na ověření, zda je zřetěžený model (několik odhadnutých parametrů) vhodný.

Počáteční odhady parametrů (Cypsa).

Tab. 12.2. Počáteční odhady parametrů a omezení na odhadnutou autokorelační funkci r_k

Proces	Počáteční odhady parametrů	Omezení na r_k
AR(1)	$\hat{\phi}_1 = r_1, \quad \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = c_0(1 - \hat{\phi}_1 r_1)$	$ r_1 < 1$
AR(2)	$\hat{\phi}_1 = \frac{r_1(1 - r_2)}{1 - r_1^2}, \quad \hat{\phi}_2 = \frac{r_2 - r_1^2}{1 - r_1^2},$ $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = c_0(1 - \hat{\phi}_1 r_1 - \hat{\phi}_2 r_2)$	$ r_2 < 1,$ $r_1^2 < \frac{r_2 + 1}{2}$
MA(1)	$\hat{\theta}_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4r_1^2}}{2r_1}, \quad \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{c_0}{1 + \hat{\theta}_1^2}$	$ r_1 < \frac{1}{2}$
MA(2)	iteračním řešením (11.55) nebo pomocí grafického diagramu nebo $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_2 = 0, 1, \quad \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{c_0}{1 + \hat{\theta}_1^2 + \hat{\theta}_2^2}$	$r_2 + r_1 > -\frac{1}{2},$ $r_2 - r_1 > -\frac{1}{2},$ $r_1^2 < 4r_2(1 - 2r_2)$
ARMA(1, 1)	$\hat{\phi}_1 = \frac{r_2}{r_1}, \quad \hat{\theta}_1 = \frac{\hat{b} \pm \sqrt{\hat{b}^2 - 4}}{2},$ $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{c'_0}{1 + \hat{\theta}_1^2},$ kde $\hat{b} = \frac{1 - 2r_2 + \hat{\phi}_1^2}{r_1 - \hat{\phi}_1}, \quad \hat{\theta}_1 < 1,$ $c'_0 = \sum_{i=1}^n \frac{(y'_i - \bar{y}')^2}{n},$ $y'_i = y_i - \hat{\phi}_1 y_{i-1}, \quad \bar{y}' = \sum_{i=1}^n \frac{y'_i}{n}$	$2r_1^2 - r_1 < r_2 < r_1 $

Julev - Walkerův odhad pro AR(p):

Pro AR(1) jíme měli: $R(k) = E(Y_{t+k}, Y_t) = \varphi R(k-1)$ pro $k \geq 1$

$$R(0) = E Y_t Y_t = \varphi^2 R(0) + \sigma^2 \Rightarrow R(0) = \frac{\sigma^2}{1 - \varphi^2}$$

pomocí autokorelační fce: $\rho(k) = \varphi \rho(k-1)$

$$\rho(0) = 1$$

analogicky pro AR(p):

$$\rho(k) = \varphi_1 \rho(k-1) + \varphi_2 \rho(k-2) + \dots + \varphi_p \rho(k-p)$$

$$\rho(0) = 1$$

$$\begin{aligned} \left(\text{podobně } R(k) = E Y_{t+k} Y_t = E \left(\varphi_1 Y_{t+k-1} + \varphi_2 Y_{t+k-2} + \dots + \varphi_p Y_{t+k-p} + \varepsilon_{t+k} \right) \right. \\ \left. \times Y_t \right) \\ = \varphi_1 R(k-1) + \varphi_2 R(k-2) + \dots + \varphi_p R(k-p) \end{aligned}$$

To jsou tzv. Julev - Walkerovy rovnice.

Odhad parametru se z nich počítá tak, že se dosadí

odhady autokorelační fce $r_1, \dots, r_k$ a rovnice se

vyřeší vzhledem k $\varphi_1, \dots, \varphi_p$.