

Spektrální analýza

Představa: řada je směsí sinusových a kosinusových křivek s různými amplitudami a frekvencemi

Cíl: najít frekvence, které jsou zastoupeny nejvýznamněji

spektrální hustota: $f(\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} e^{-ih\pi} R(h)$, kde $\pi \in (-\pi, \pi)$

za předpokladu, že $\sum_{h=-\infty}^{\infty} |R(h)| < \infty$

π ... frekvence, udává se v radiánech za časovou jednotku

periodogram: $I_m(\pi) = \frac{1}{m} \left| \sum_{t=1}^m y_t e^{-it\pi} \right|^2$ %

je jednoduchým odhadem 2π -násobky spektrální hustoty

Jak se najdou významné frekvence?

Odpovídají jim významná lokální maxima v grafu spektrální hustoty (resp. periodogramu).

Příklad: bílý šum

$$R(0) = \sigma^2, \quad R(h) = 0 \text{ pro } h \neq 0$$

$$f(\pi) = \frac{\sigma^2}{2\pi}$$

všechny frekvence jsou zastoupeny stejně

% Platí: $E \bar{I}_m(\lambda) \rightarrow \mathbb{I}_f(\lambda)$ pro $m \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \underline{\text{Dů:}} \quad E \bar{I}_m(\lambda) &= \frac{1}{m} E \sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^m y_s y_t e^{-i s \lambda} e^{i t \lambda} = \\ &= \frac{1}{m} \sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^m R(s-t) e^{-i(s-t)\lambda} \end{aligned}$$

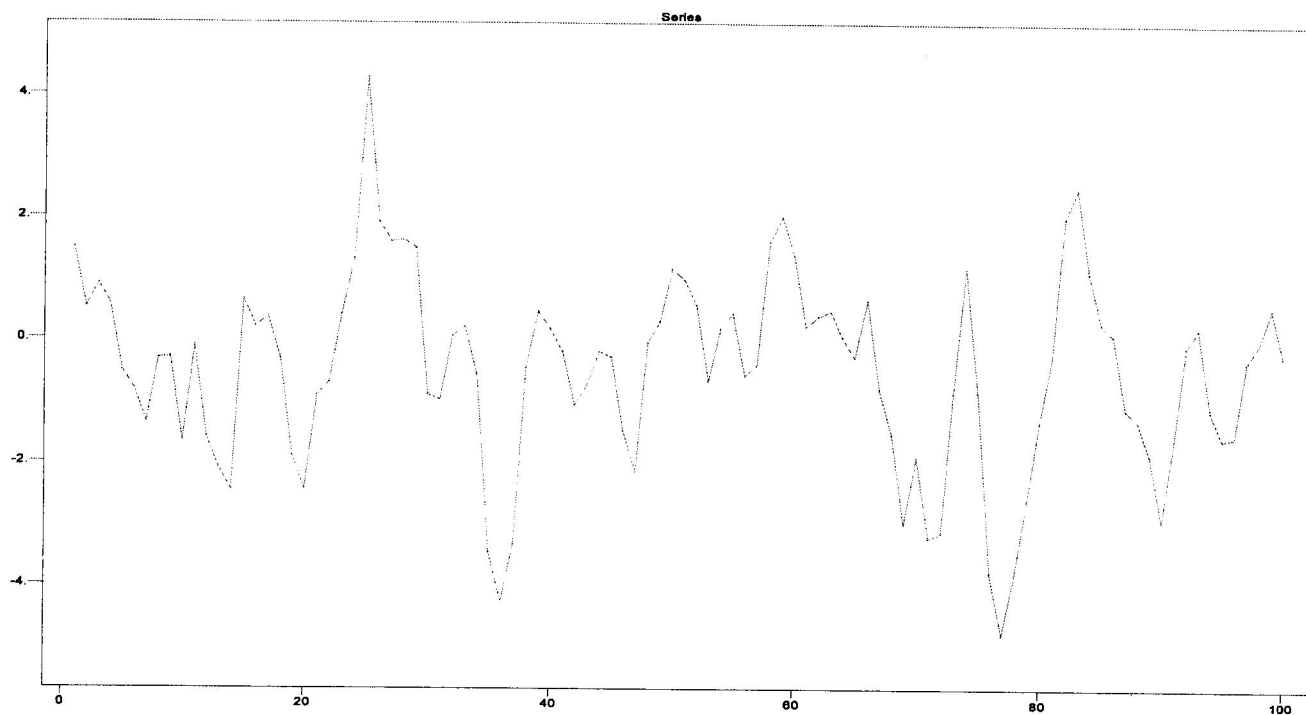
položíme $s-t = h$

necháme běžet $m \rightarrow \infty$

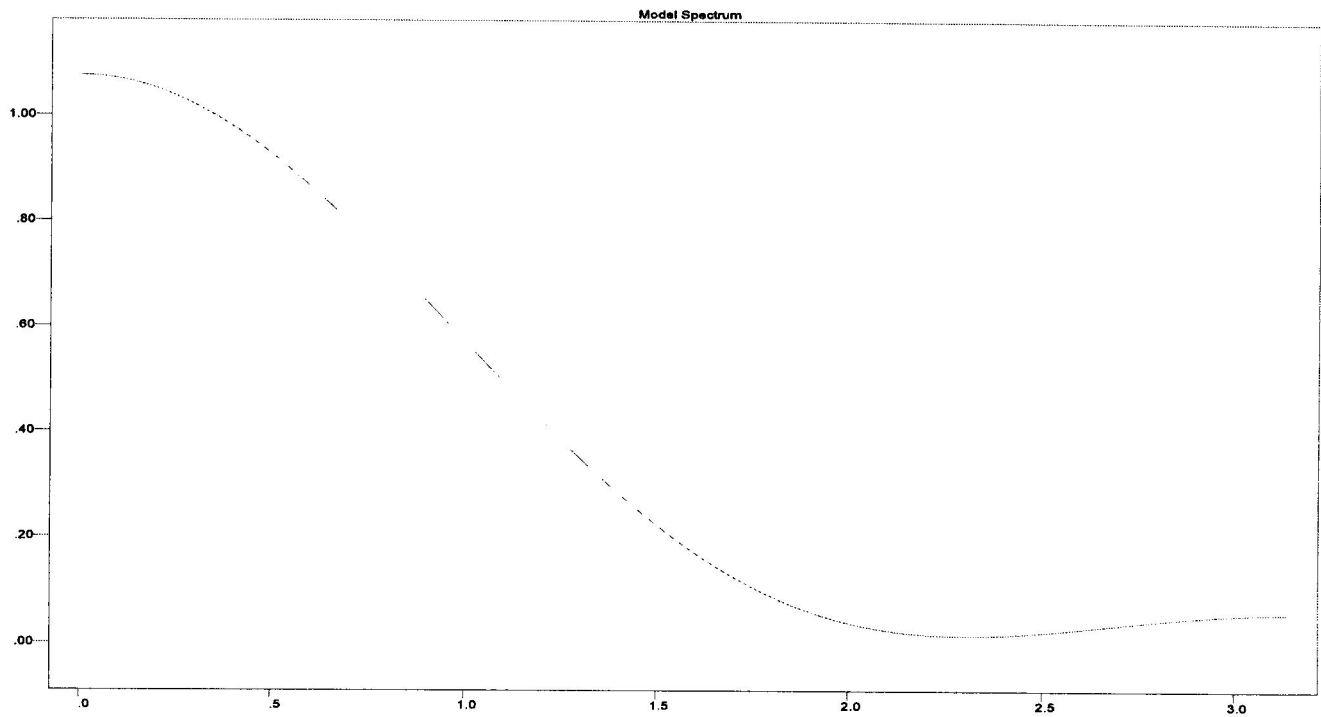
Použití periodogramu:

testování periodicity

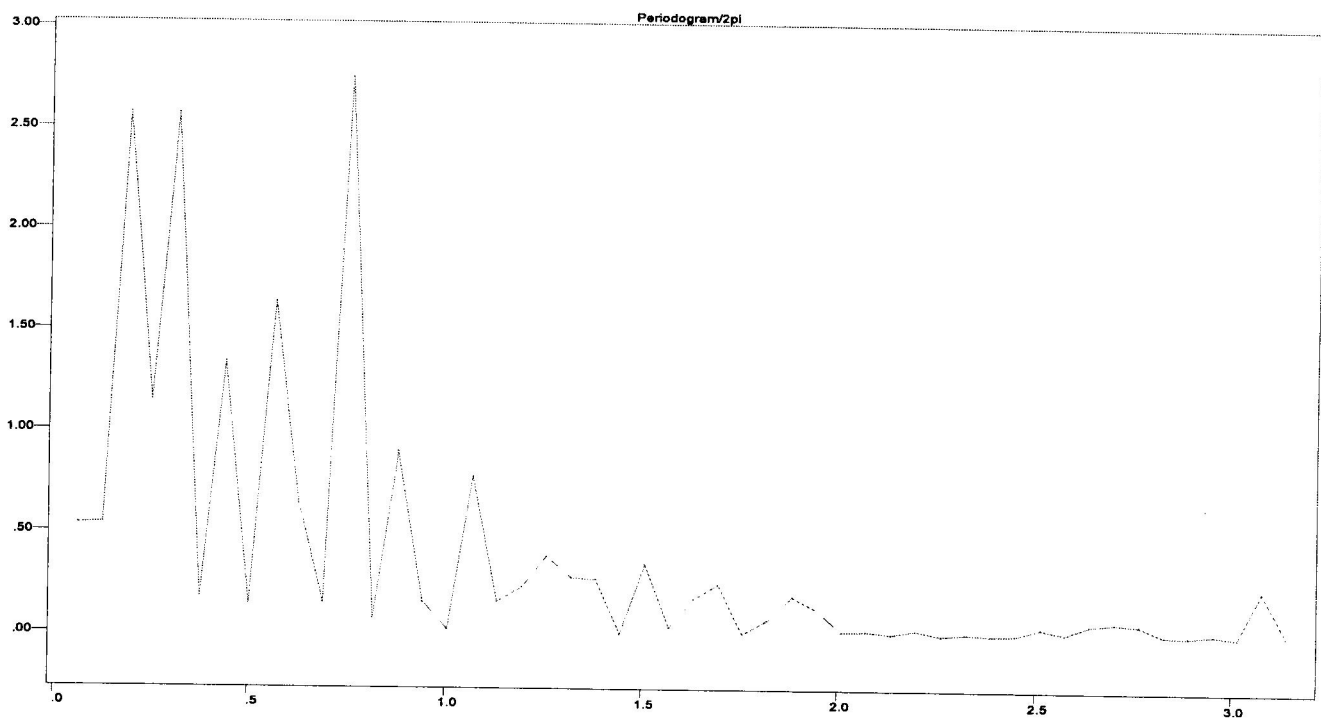
odfiltrování šumu - odříznou se vysoké frekvence



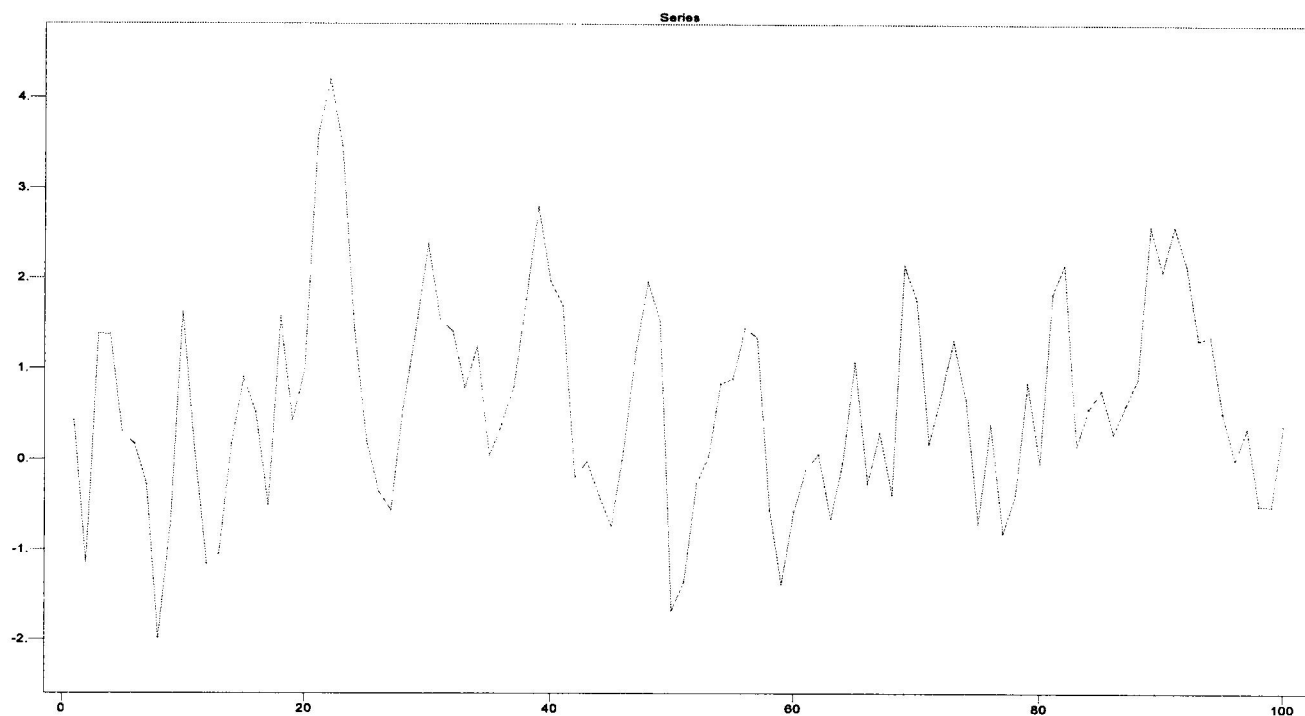
Simulovana' MA(2) : $X_t = Z_t + Z_{t-1} + 0.6Z_{t-2}$



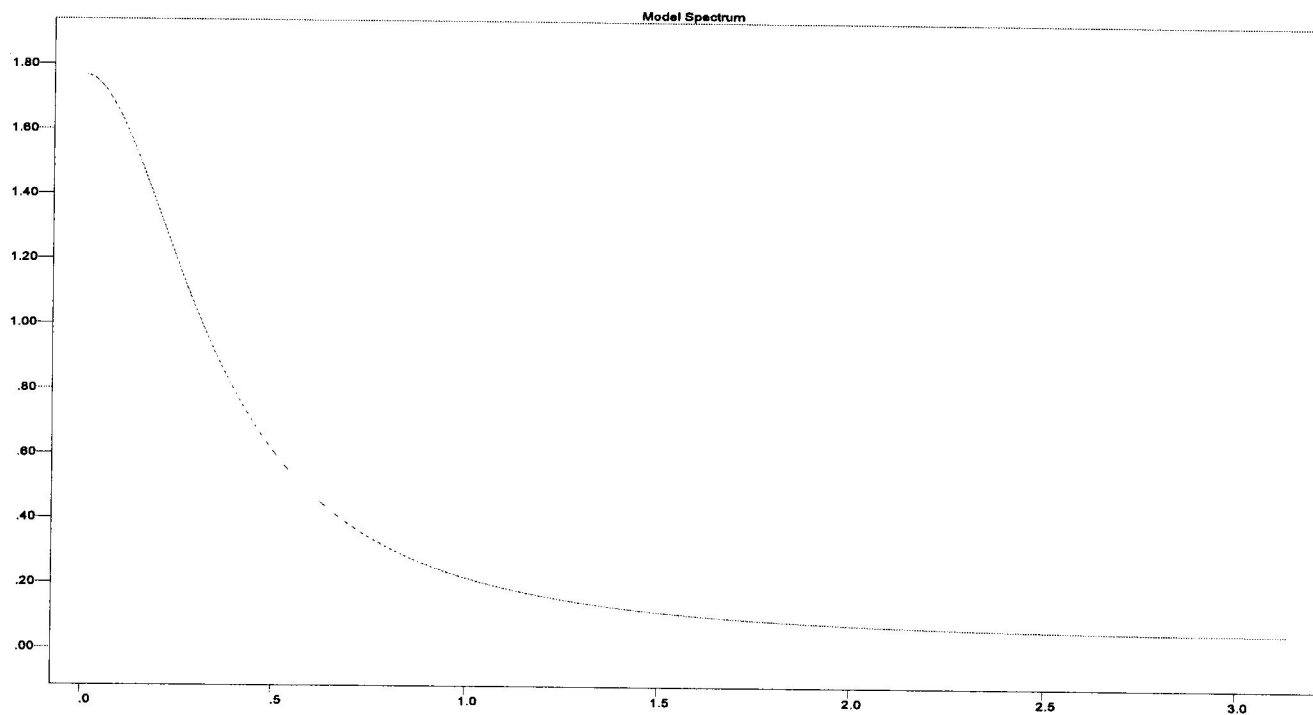
Spektrálna hustota MA(2)



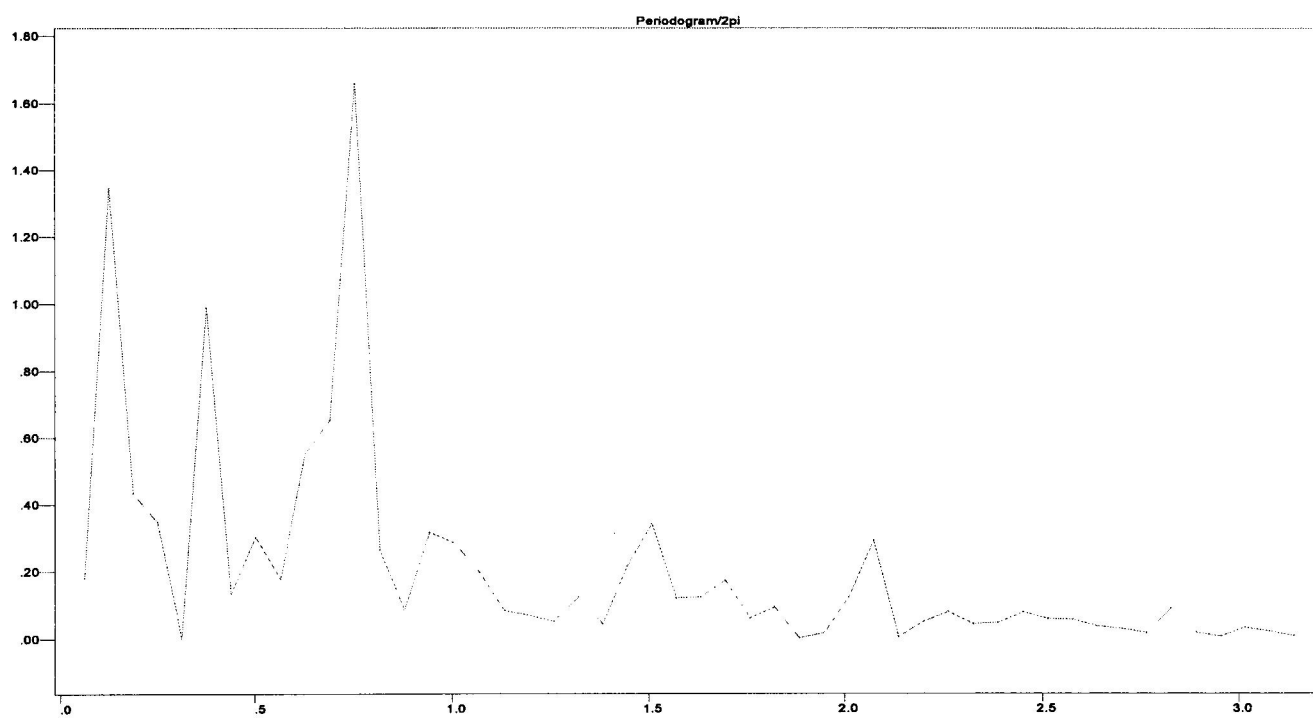
Periodogram MA(2)



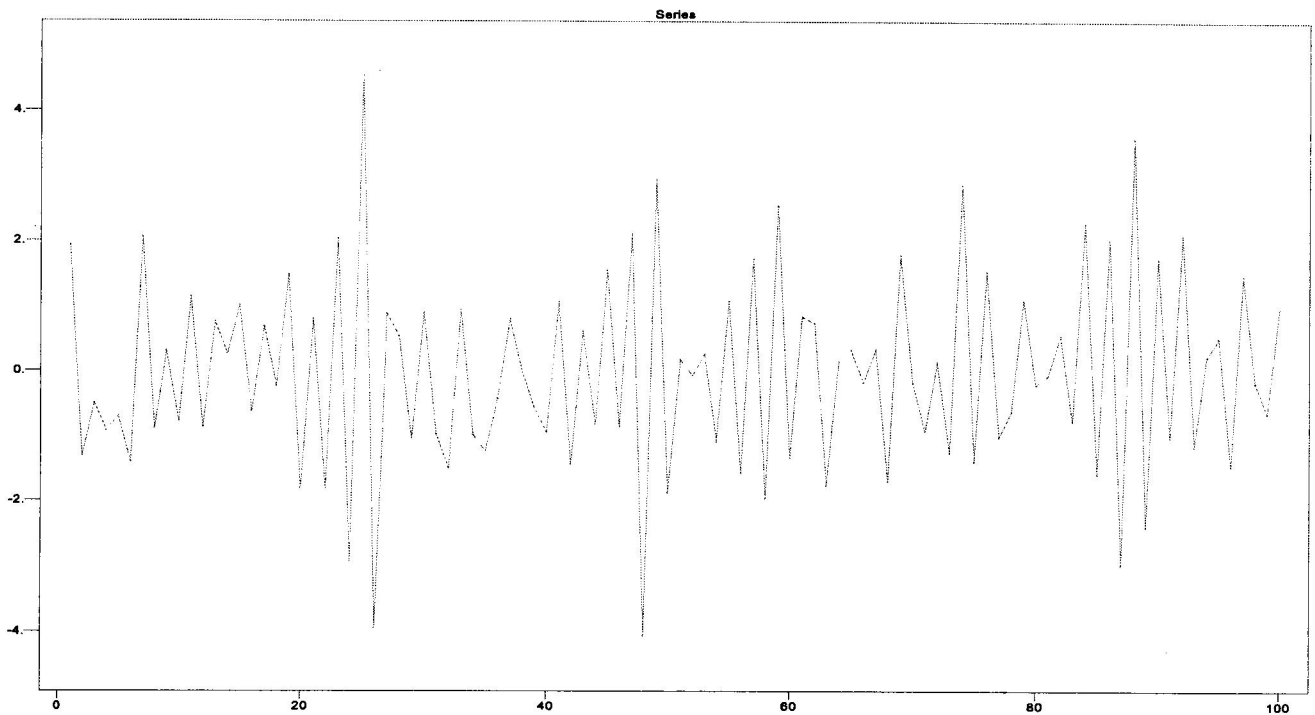
Simulovaná řada $AR(1)$: $X_t = 0.7X_{t-1} + \varepsilon_t$



Spektralni' hustota AR(1)

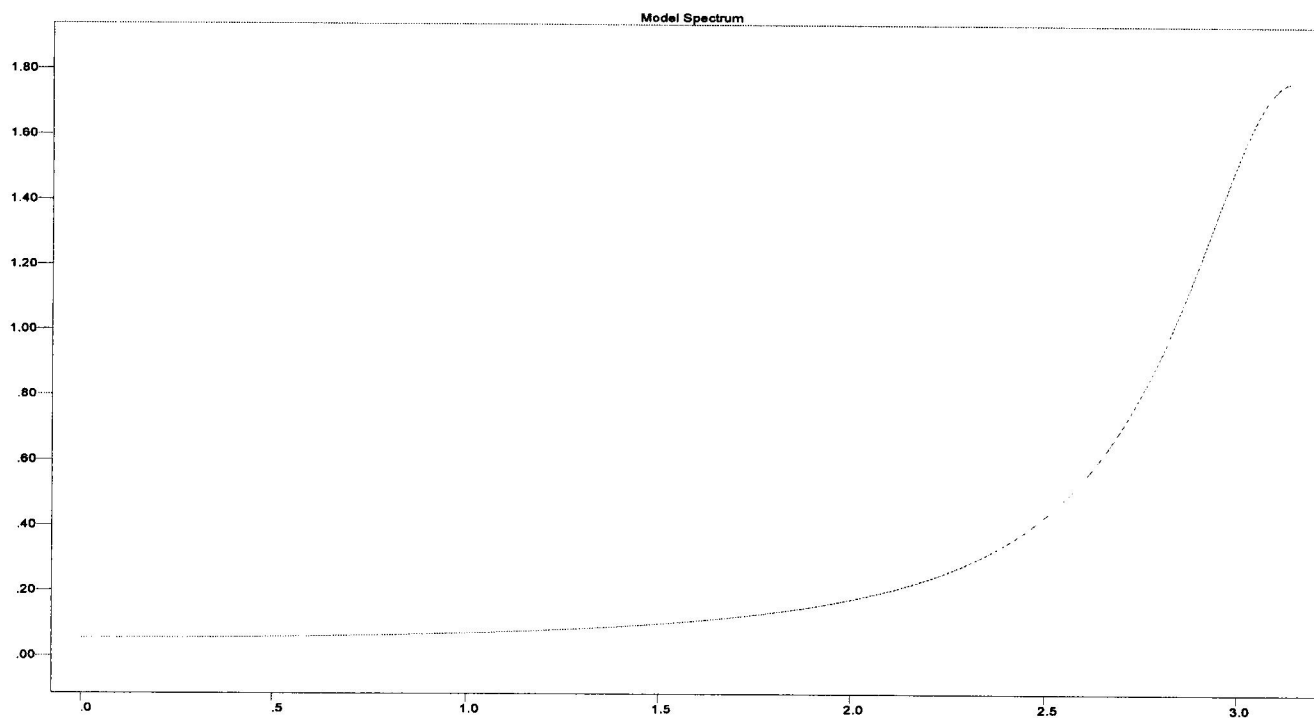


periodogram AR(1)

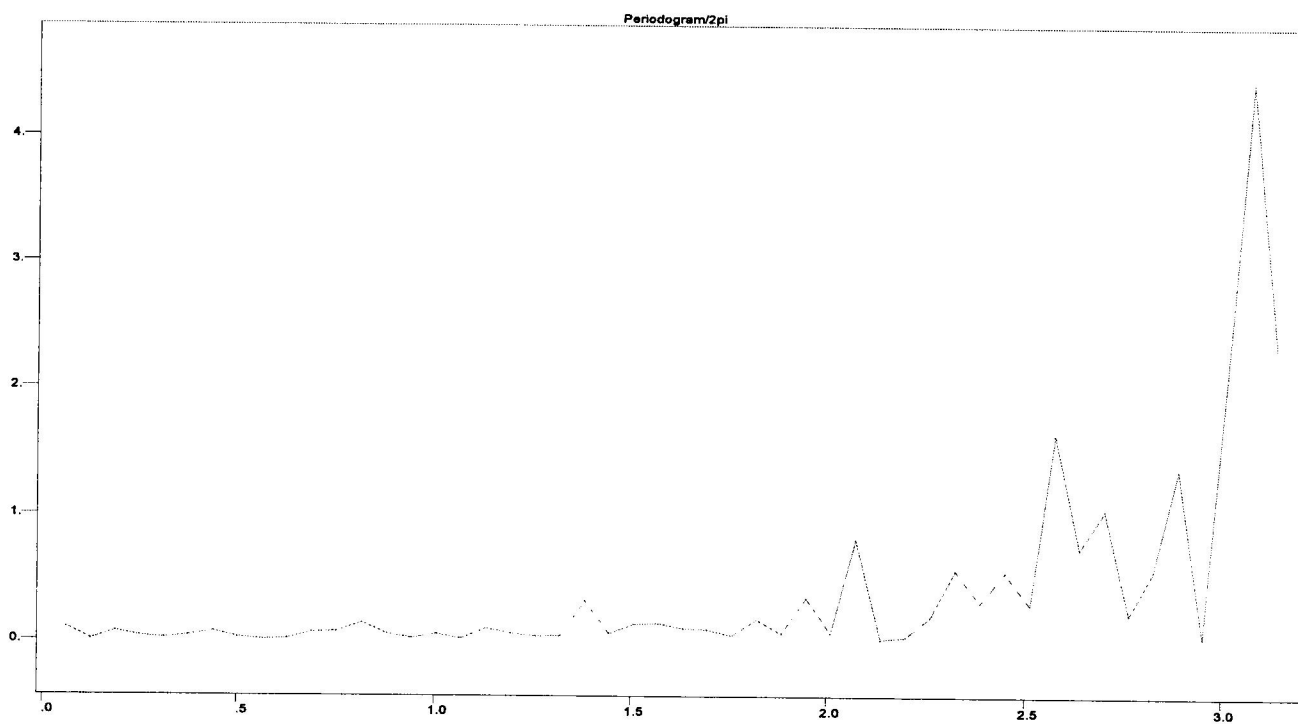


Simulovaná $AR(1)$: $X_t = -0.7X_{t-1} + \varepsilon_t$

Záporný koeficient mění průběh řady, spektrální hustotu i periodogram

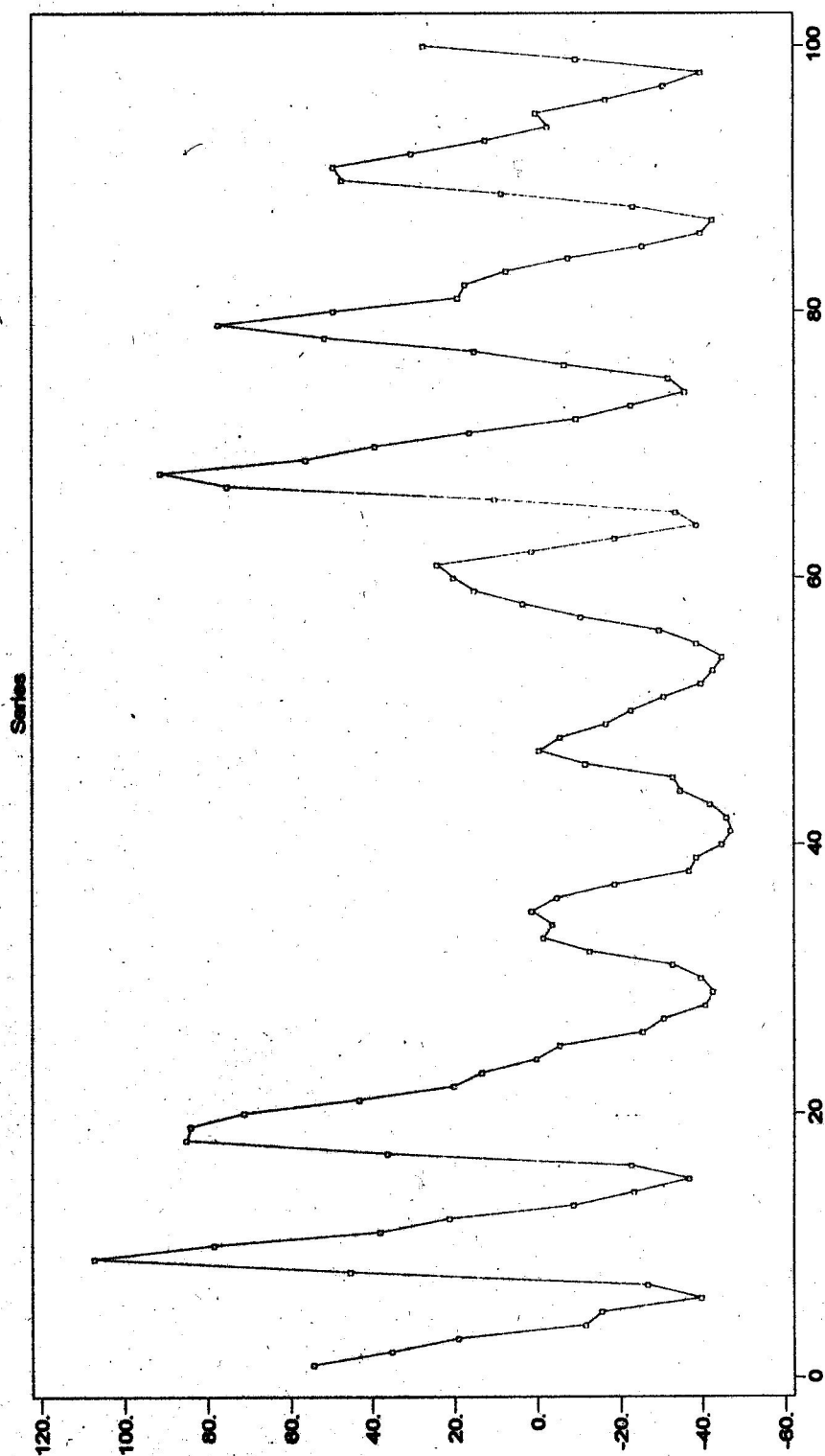


spektralni' hustota $AR(1)$



periodogram $AR(1)$

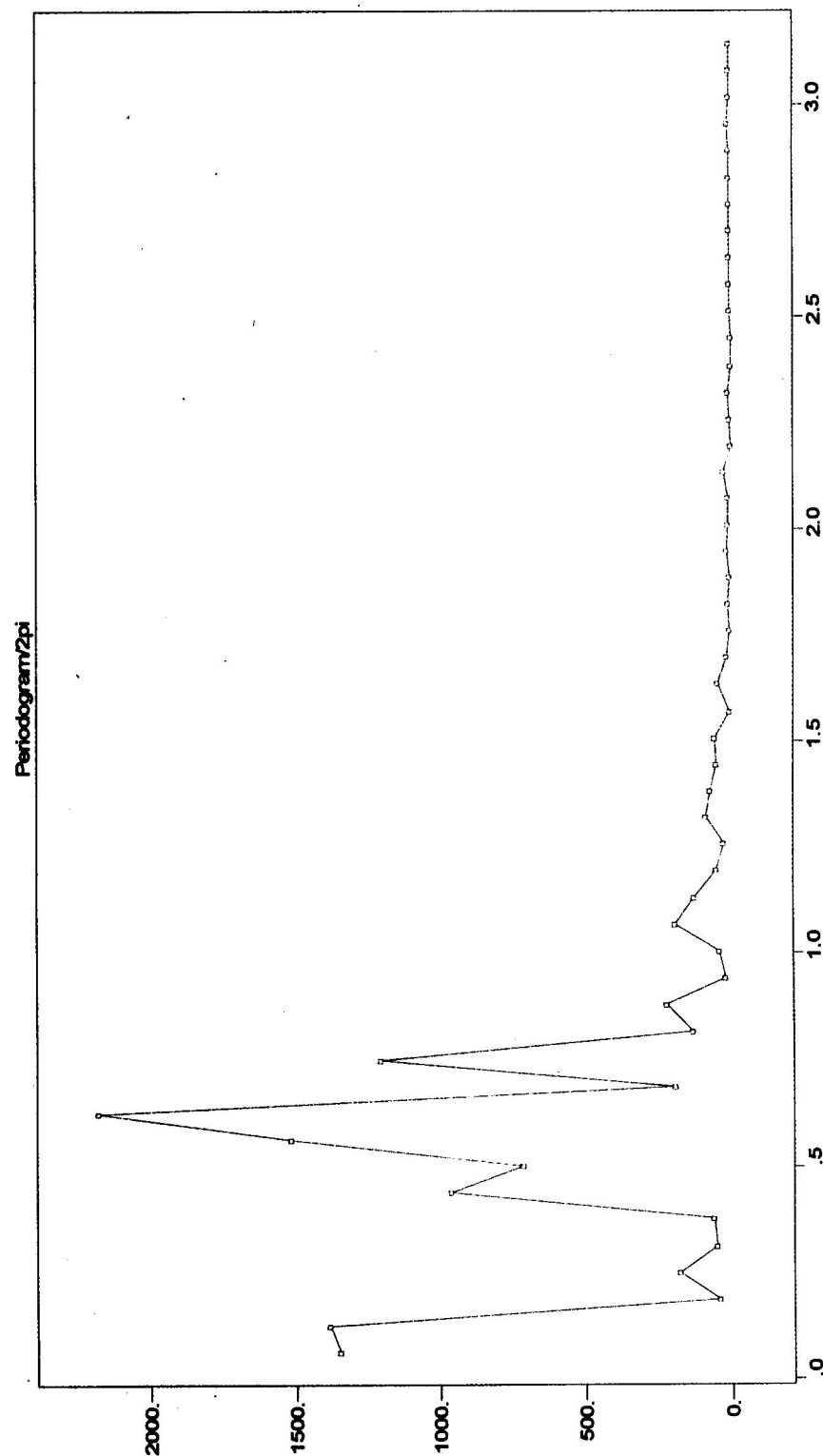
Roční počet slunečních skvrn v letech 1770-1869



Spektrální analýza časových řad

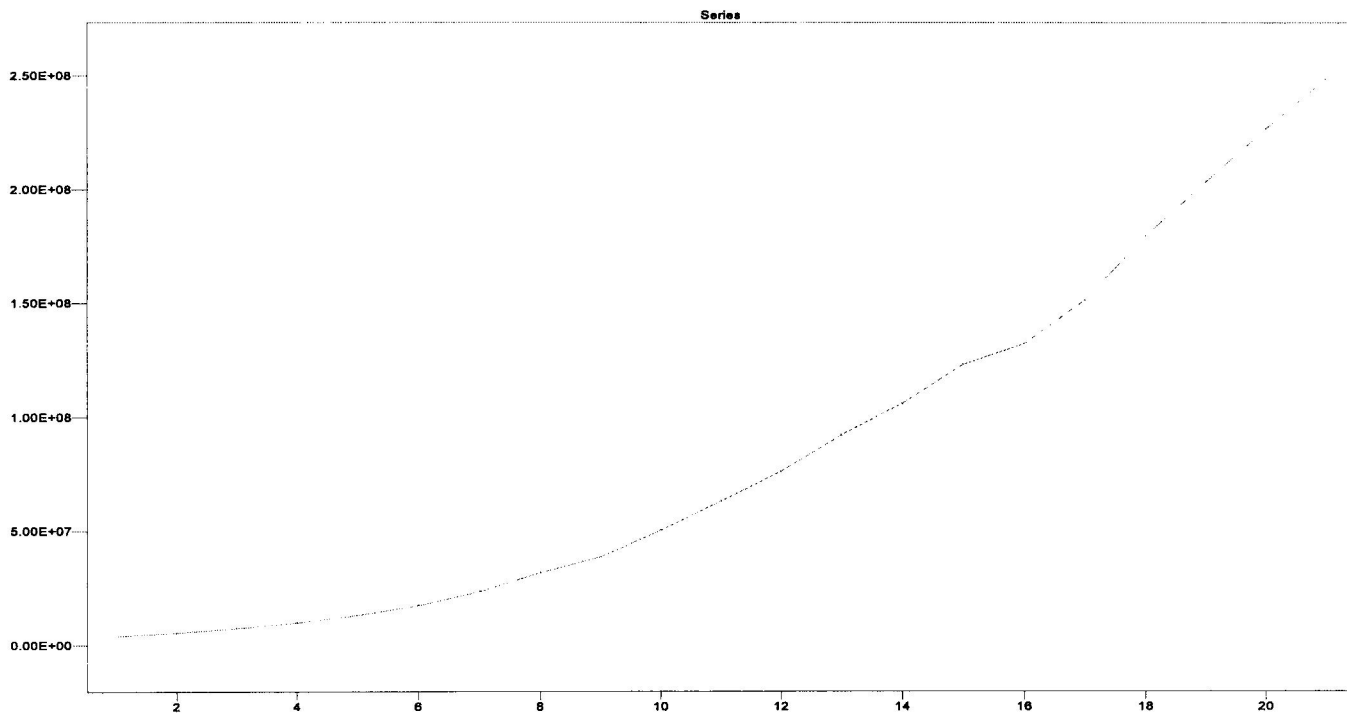
$$I_n(\lambda) = \frac{1}{n} \left| \sum_{t=1}^n x_t e^{-i\lambda t} \right|^2$$

periodogram (vydělený 2π) pro předchozí řadu:

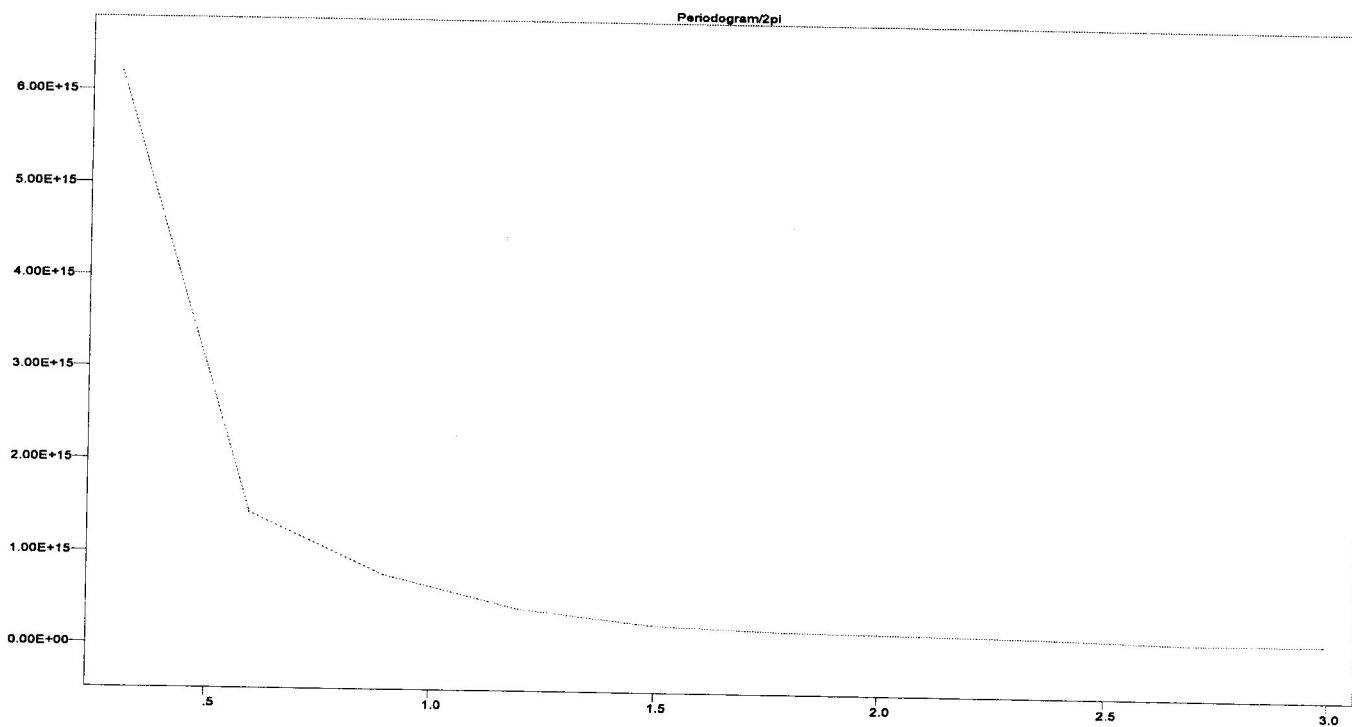


Lokální maximum odpovídá frekvenci $2\pi/10$ radiánů za rok, což odpovídá cyklu s periodou přibližně 10 až 11 let, která je patrná i z průběhu řady.

(1. globální maximum v bodě přibližně 0.116 odpovídá asi $2\pi/54$, tj. perioda přibližně 54 let)

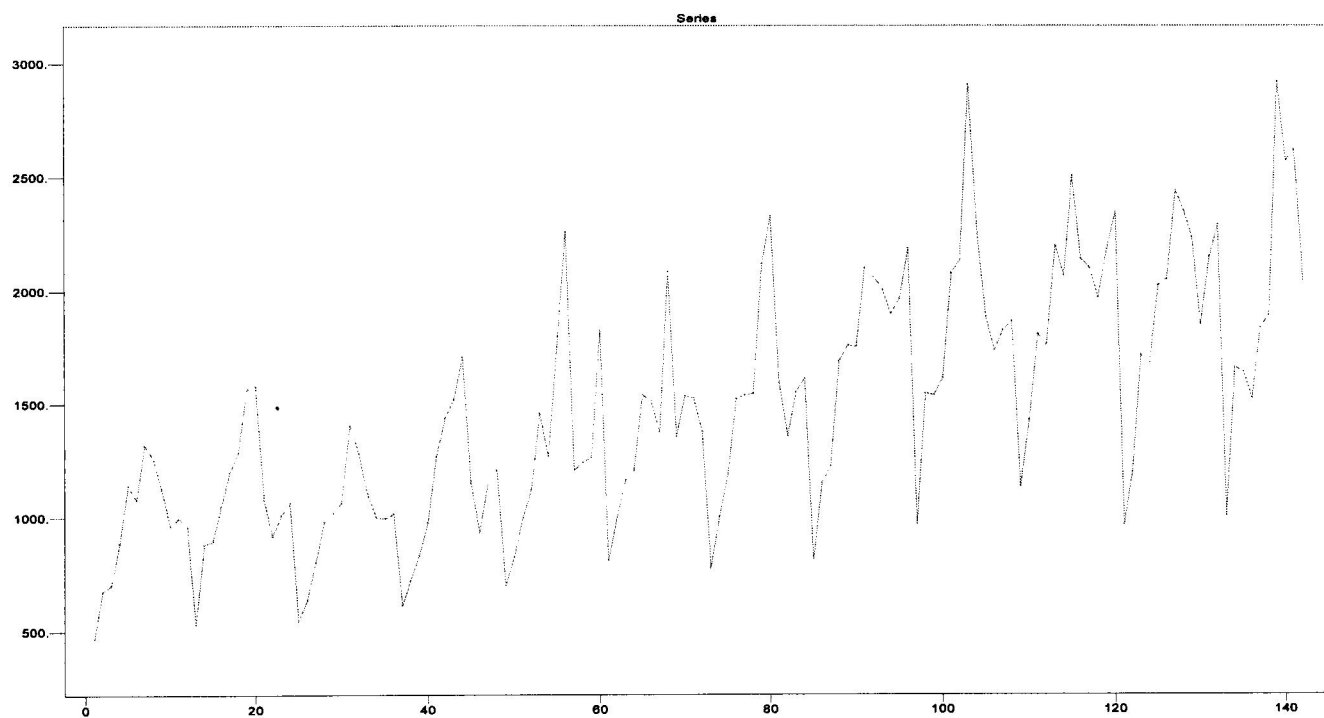


Obyvatelstvo USA

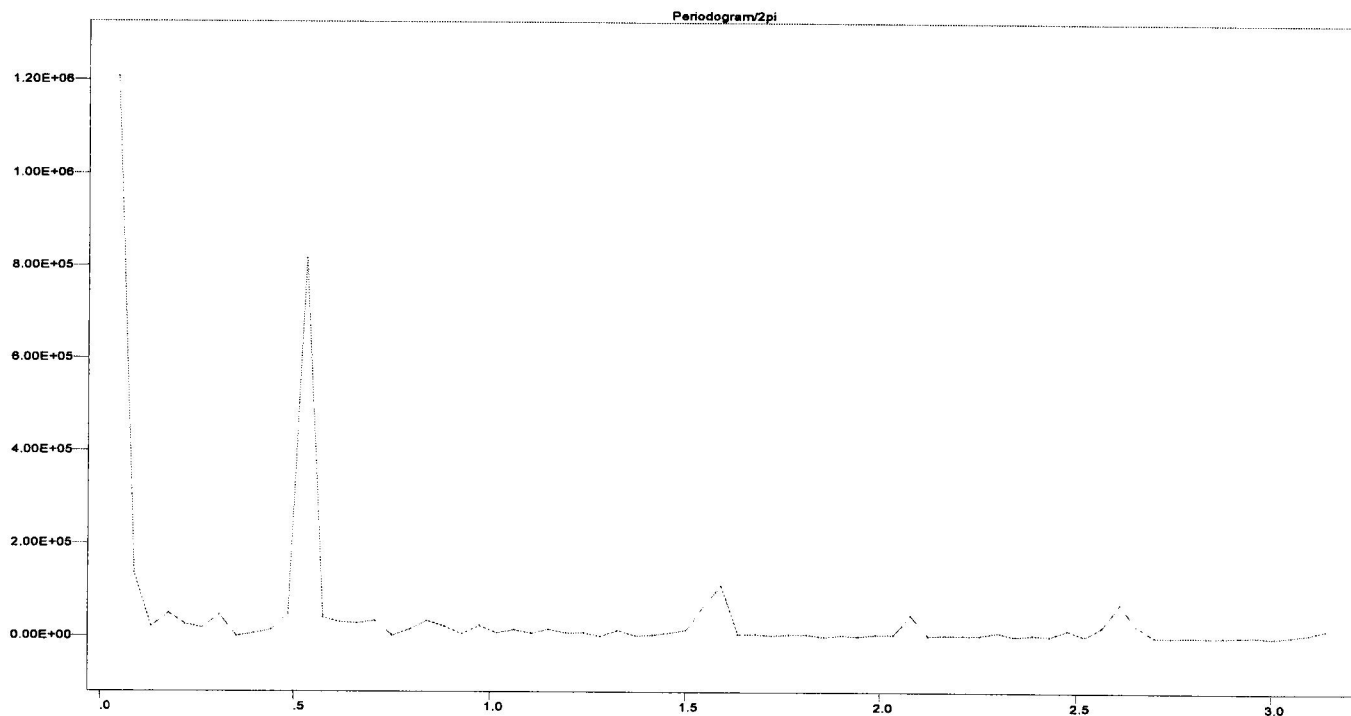


Obyvatelstvo USA - periodogram

Významná frekvence o odpovídá trendu



Prodej vína v Austrálie

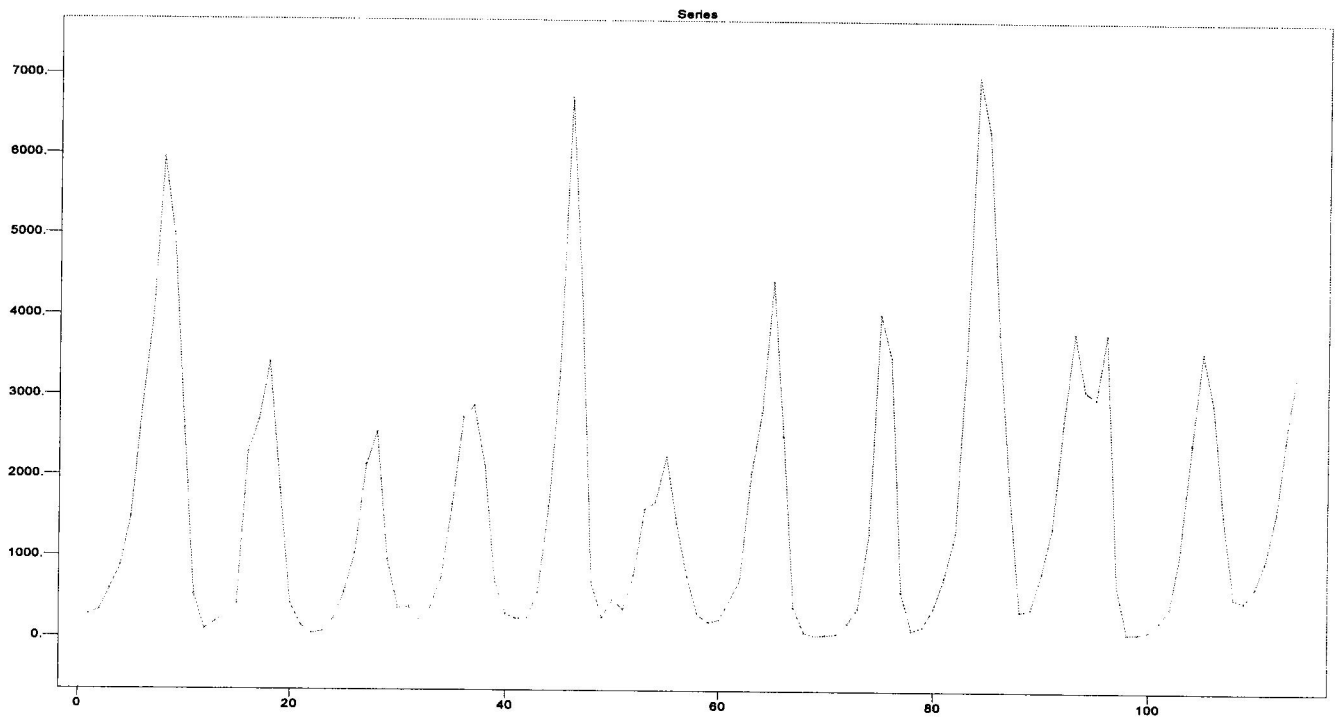


Prodej vína v Austrálii - periodogram

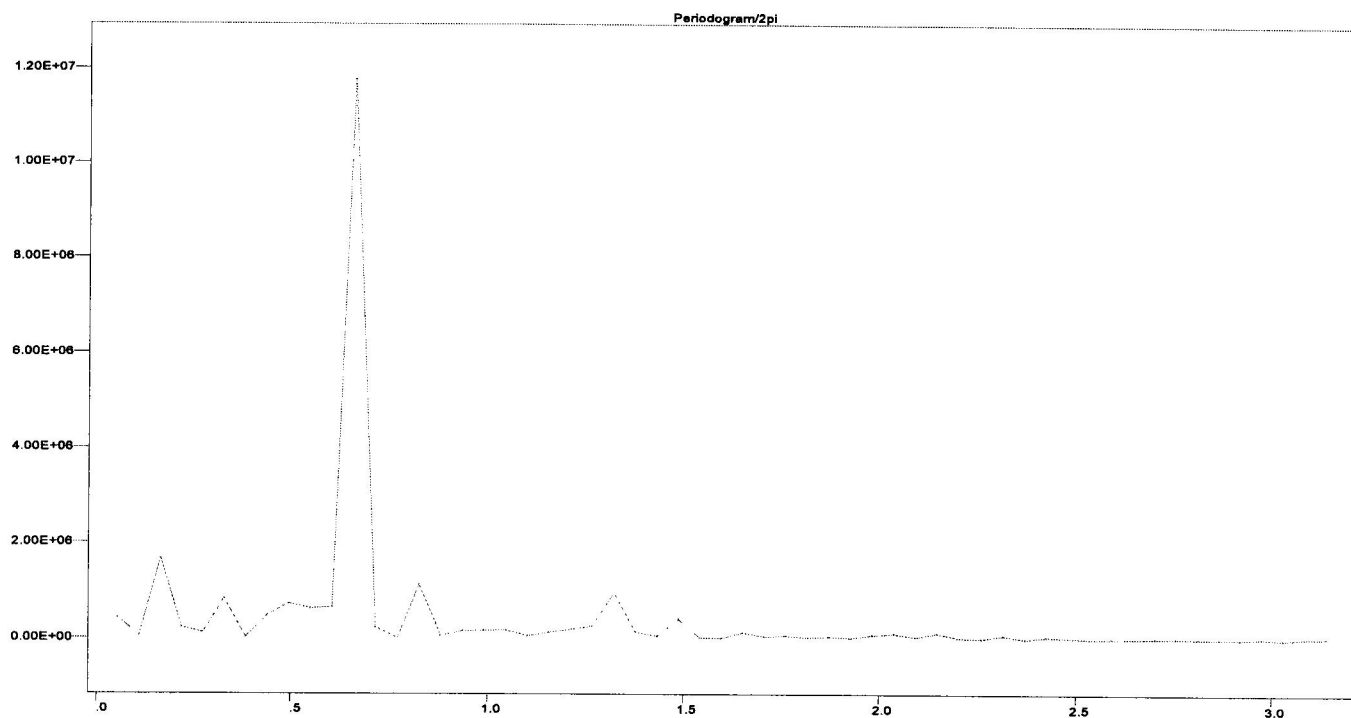
Významná frekvence $\approx 0,5 = \frac{2\pi}{12}$ radiánů za časovou jednotku (tj. měsíc)

delka periody ≈ 12 měsíců

Maximum v 0 odpovídá délce periody ω , tedy trendu



Kanadsky' rys



Kanadský rys - periodogram

$$\text{významná frekvence} \doteq 0,65 \doteq \frac{2\pi}{10}$$

$$\text{délka periody} \doteq 10 \text{ let}$$

$$\text{další frekvence} \doteq 0,15 \doteq \frac{2\pi}{40}$$

$$\text{délka periody} \doteq 40 \text{ let}$$