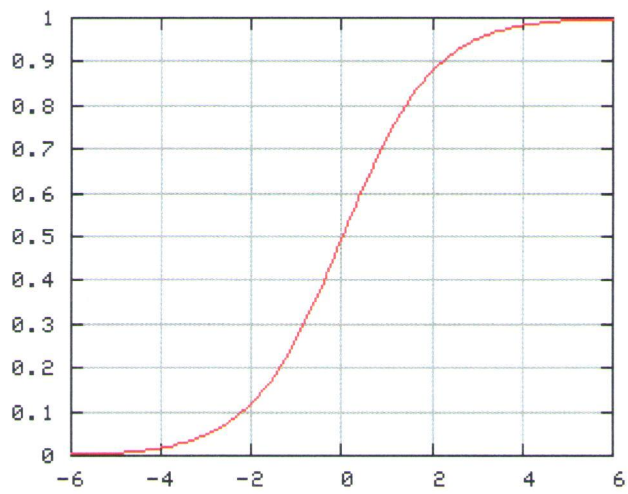
Logistická funkce

Z Wikipedie, otevřené encyklopedie

Logistická funkce nebo též **logistická křivka** je reálná funkce definovaná jako

$$f(t; a, m, n, \tau) = a\frac{1 + me^{-t/\tau}}{1 + ne^{-t/\tau}}$$

kde *f* je funkční hodnota, *a, m, n,* a τ reálné parametry. Nezávisle proměnnou označujeme jako *t*, protože logistická funkce se často používá pro modelování vývoje v čase. V počáteční fázi je růst přibližně exponenciální, později s rostoucím nasycením se zpomaluje, a nakonec se asymptoticky zastaví. Logistická funkce se často používá v empirických vědách pro modelování růstu populací, koncentrací a podobně.



Sigmoida

Sigmoida

Významným příkladem logistické funkce je speciální případ s parametry $a = 1$, $m = 0$, $n = 1$, $\tau = 1$, tedy

$$P(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}}$$

Tato logistická funkce se pro svůj tvar někdy označuje též jako sigmoida. Je řešením nelineární diferenciální rovnice prvního řádu

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = P(1 - P), \quad (2)$$

s okrajovou podmínkou P(0) = 1/2. Používá se často jako sponová funkce (link function) ve statistických modelech (logistická regrese).

Význam

Logistické křivky se objevují jako řešení různých modelů například v demografii, biologii a ekonomii.

Související články

V tomto článku byl použit překlad textu z článku Logistic function (https://en.wikipedia.org/wiki/Logistic_function?oldid=148891010) na anglické Wikipedii.

Benjamin Gompertz

Z Wikipedie, otevřené encyklopedie

Benjamin Gompertz (5. března 1779 - 14. června, 1865, Londýn, Anglie), matematik samouk, který nebyl přijat na univerzitu pro svůj židovský původ. Jeho jméno je nejčastěji spojováno s demografickým modelem, který publikoval v roce 1825.

Benjamin Gompertz

$$N'(t) = rN(t)\log\left(\frac{K}{N(t)}\right)$$

$N(t)$ počet jedinců v čase *t*, *r* je vlastní koeficient růstu a *K* je počet jedinců v rovnovážném stavu

Gompertzova křivka

Rovnice popisující Gompertzovu křivku (Gompertzova funkce) je používaná k extrapolaci časových řad s mezí saturace (nasycení) a pomalejším počátečním a koncovým růstem.

$$y(t) = ae^{be^{ct}}$$

- *a* mez saturace
- *c* koeficient růstu
- *b, c* jsou záporná čísla
- *e* Eulerovo číslo - základ přirozeného logaritmu (*e* = 2.71828…)

Příklady použití Gompertzovy křivky:

- Množství mobilních telefonů - růst byl nejprve pomalý kvůli vysoké ceně a po prudkém vzestupu následovalo nasycení trhu
- Růst populace v omezeném prostoru - po strmém vzestupu dochází k vyčerpání zdrojů a růst populace se zastavuje

Externí odkazy

B. Burcin, K. Tesárková, L. Šídlo (PřF)

Tab. 1 Přehled nejpoužívanějších modelů vyhlazování a extrapolace křivky úmrtnosti

Název modelu	Rok navržení	Typ	Počet parametrů	Vzorec
Gompertz-Makeham	1860	exponenciální	3	$\mu_x = a + b * c^x$
Modifikovaný Gompertz-Makeham	1980	exponenciální	4	$\mu_x = a + b * c^{x_0 + \frac{1}{\gamma} * ln[\gamma * (x - x_0) + 1]}$
Himes-Preston-Condarn	1994	logistický	2	$m_x = \frac{b * e^{a*x}}{1 + b * e^{a*x}}$
Heligman-Pollard	1980	logistický	2	$q_x = \frac{b * e^{a*x}}{1 + b * e^{a*x}}$
Thatcher	1999	logistický	3	$\mu_x = \frac{z}{1+z} + \gamma$, kde $z = \alpha * e^{\beta * x}$
Kannistö	1992	logistický	2	$\mu_x = \frac{e^{[\theta_0 + \theta_1 * (x-80)]}}{1 + e^{[\theta_0 + \theta_1 * (x-80)]}}$
Beard	1959	logistický	3	$m_x = \frac{b * e^{a*x}}{1 + c * e^{a*x}}$
Kubický	2007	kubický	4	$\mu_x = B * C^x * D^{x^2} * E^{x^3}$
Coale-Kisker	1990	lineární	3	$m_x = e^{a*x^2 + b*x + c}$
Denuit-Goderniaux	2005	logistický	3	$ln\ \hat{q}_x = a + b * x + c * x^2$
Polynomická funkce 2. stupně	...	matematický	3	$m_x = a + b * x + c * x^2$
Polynomická funkce 3. stupně	...	matematický	4	$m_x = a + b * x + c * x^2 + d * x^3$
Weibull	1951	mocninný	2	$m_x = b * x^a$

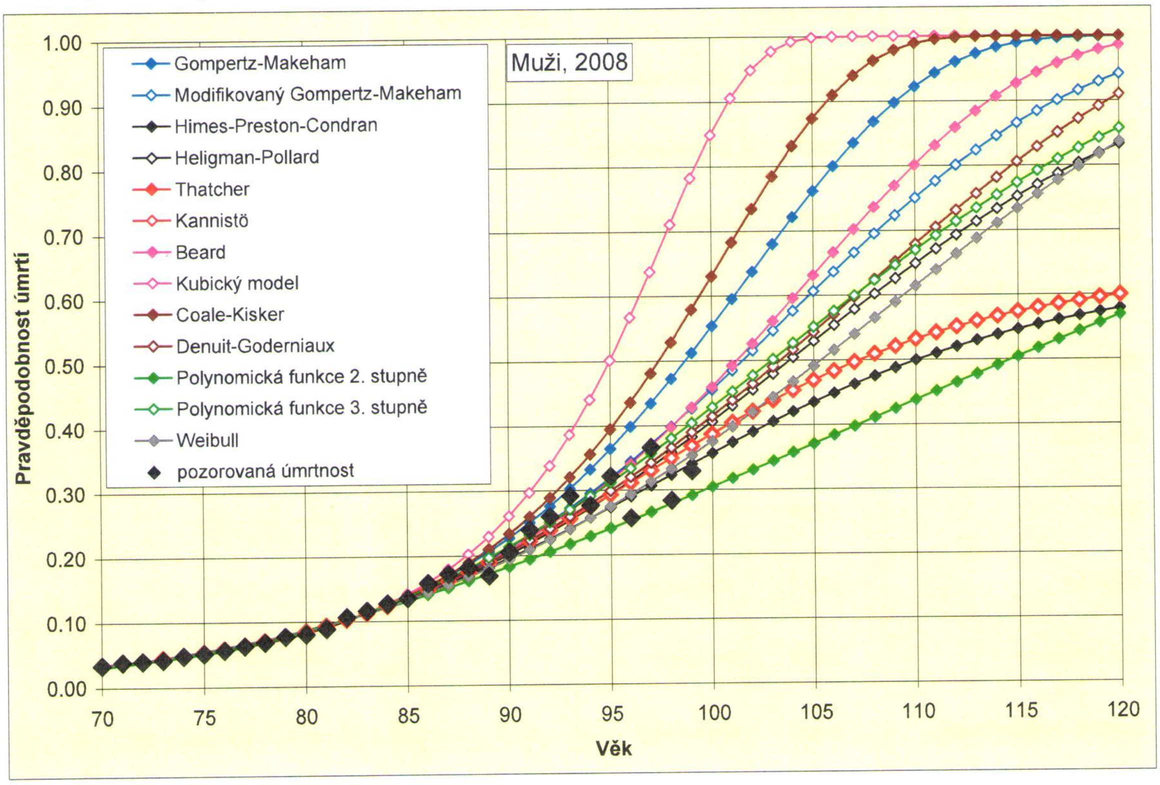
Aplikace modelu na česká data ve vybraných letech a možné důsledky volby různých modelů vyrovnání úmrtnosti

Výše představené modely byly aplikovány na data za Českou republiku (obr. 1a a 1b). Pro vzájemné porovnání byl zvolen rok 2008, za který jsou k dispozici nejnovější údaje[3]. Odhad parametrů většiny modelů probíhal metodou nejmenších čtverců, výjimkou byla modifikovaná Gompertz-Makehamova funkce, kde byl nutný přístup k řešení pomocí nelineárních nejmenších čtverců ve statistickém programu SAS[4]. Klíčový byl také výběr věků, které vstupovaly do výpočtu parametrů jednotlivých modelů. Ve většině případů se jednalo o věky 60 až 85 let, výjimky byly v tomto případě dvě a jednalo se o modely cíleně konstruované pro vyrovnávání úmrtnosti v nejvyšších věcích. Prvním z nich je model Denuit-Goderniaux aplikovaný na věky 75–85 let, druhým je opět modifikovaná Gompertz-Makehamova funkce, jejíž parametry byly odhadovány na základě měr úmrtnosti ve věcích 85 až 95 let.

[3] Pro porovnání modelů s realitou by byla výhodnější volba roku krátce po sčítání lidu, kdy dochází korekcí počtu obyvatel podle věku ke zpřesnění empirických měr úmrtnosti. Pro ilustraci rozdílů mezi jednotlivými modely však tento fakt nehraje podstatnou roli.

[4] Pro využití modelů v praxi, tedy s cílem následného využití pro konstrukci úmrtnostních tabulek, by bylo statisticky korektnější použití metody vážených nejmenších čtverců, neboť není splněn předpoklad o konstantním rozptylu pozorování, u empirických měr úmrtnosti jakožto odhadů intenzit úmrtnosti je rozptyl nepřímo úměrný střednímu stavu obyvatel v daném věku.

Graf 1a Porovnání křivek pravděpodobnosti úmrtí v nejvyšších věcích podle prezentovaných modelů, Česká republika, 2008, muži



Graf 1b Porovnání křivek pravděpodobnosti úmrtí v nejvyšších věcích podle prezentovaných modelů, Česká republika, 2008, ženy