

Porovnaní více výběrů

(7)

Máme 2 možnosti:

a) Porovnat navzájem všechny dvojice

Tento způsob má řada výjimečných nedostatků - jedliže se při porovnání každé dvojice dopustíme chyby α 5% , pak chyba celého navzájemného měření byla podstatně větší.

b) Porovnat všechny výběry najednou s celkovou chybou výsledku 5% (obecně α).

Máme navzájem nezávislé náhodné výběry

$$Y_{11}, \dots, Y_{1m_1} \sim N(\mu_1, \sigma^2)$$

$\vdots$

$$Y_{i1}, \dots, Y_{im_i} \sim N(\mu_i, \sigma^2)$$

$\vdots$

$$Y_{I1}, \dots, Y_{Im_I} \sim N(\mu_I, \sigma^2)$$

Testujeme hypotézu $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_I$ (σ^2 neznáme) proti alternativě, že některá dvojice H_0 porušuje (může jich být více). Pokud tedy hypotézu zamítáme, budeme dále vyšetřovat, která (nebo které) to je.

Předpokládáme nejprve obecně, že každý výěr má jinou střední hodnotu μ_i . Odhadneme ji aritmetickým průměrem $\bar{y}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}$.

Odchylky pozorovaných hodnot od svých průměrů v tomto modelu budeme měřit residuálním součtem čtverců $S_e = \sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$.

Upravíme:

$$\begin{aligned} S_e &= \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - 2 \sum_i \sum_j y_{ij} \bar{y}_i + \sum_i \sum_j \bar{y}_i^2 = \\ &= \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - 2 \sum_i \frac{1}{n_i} \left(\sum_j y_{ij} \right)^2 + \sum_i \frac{1}{n_i^2} \left(\sum_j y_{ij} \right)^2 \sum_j 1 = \\ &= \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - \sum_i \frac{1}{n_i} \left(\sum_j y_{ij} \right)^2 \end{aligned}$$

Platí, že $\frac{S_e}{\sigma^2}$ má rozdělení χ^2_{n-I} se střední hodnotou $n-I$, a tedy $s^2 = \frac{S_e}{n-I}$ je nekonzistentním odhadem rozptylu.

Vezmeme druhý model, a to, že všechny výěry mají stejnou střední hodnotu μ . Odhadneme ji celkovým průměrem $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_i \sum_j y_{ij}$, kde $n = n_1 + \dots + n_I$. Odchylky od průměru vyjádříme celkovým součtem čtverců $S_T = \sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y})^2$.

Upravíme:

$$\begin{aligned}
 S_T &= \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - 2 \sum_i \sum_j y_{ij} \bar{y} + \sum_i \sum_j \bar{y}^2 = \\
 &= \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - \frac{2}{n} \left(\sum_i \sum_j y_{ij} \right)^2 + \frac{1}{n^2} \left(\sum_i \sum_j y_{ij} \right)^2 \underbrace{\sum_i \sum_j 1}_n = \\
 &= \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_i \sum_j y_{ij} \right)^2
 \end{aligned}$$

Plati, že $\frac{S_T}{\sigma^2}$ má rozdělení χ^2_{n-1} a $\frac{S_T}{n-1}$ je nezanýmajícím odhadem σ^2 .

Ka plánnosti hypotézy H_0 by měla být S_e a S_T přibližně stejné, neboli rozdíl $S_T - S_e$ blízko nule.

Přemákneme $S_A = S_T - S_e$, S_A bude mít rozdělení χ^2_{I-1} . (*)

(S_A bude vždycky kladné, protože 1. model je v každém případě přesnější a nemůžeme mít větší nežli chybu)

Velikost
$$F = \frac{\frac{S_A}{I-1}}{\frac{S_e}{n-I}} = \frac{(n-I)S_A}{(I-1)S_e} \quad \text{má rozdělení } F_{I-1, n-I}$$

Plati-li $F \geq \underbrace{F_{I-1, n-I}(\alpha)}_{\text{kritická hodnota}}$, H_0 se zamítá.

(*) jinde:
$$S_A = \sum_{i=1}^I n_i (\bar{y}_i - \bar{y})^2$$

$$S_A = S_T - S_E = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - \frac{1}{n} \overbrace{\left(\sum_i \sum_j y_{ij} \right)^2}^{(n\bar{Y})^2} - \sum_i \sum_j y_{ij}^2 + \sum_i \frac{1}{n_i} \left(\sum_j y_{ij} \right)^2$$

$$S_A = \sum_{i=1}^I n_i (\bar{y}_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^I n_i \bar{y}_i^2 - 2 \sum_{i=1}^I n_i \bar{y}_i \bar{Y} + \sum_{i=1}^I n_i \bar{Y}^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^I n_i \left(\frac{1}{n_i} \sum_j y_{ij} \right)^2 - 2 \bar{Y} \underbrace{\sum_{i=1}^I \sum_j y_{ij}}_{n\bar{Y}} + \bar{Y}^2 \underbrace{\sum_{i=1}^I n_i}_n =$$

$$= \sum_i \frac{1}{n_i} \left(\sum_j y_{ij} \right)^2 - n \bar{Y}^2$$

Ľiste jianou formálne

(2a)

Testujeme hypotézu $H_0: \mu_1 = \dots = \mu_i = \dots = \mu_I$ (σ^2 neznáme).

Alternatívou je, že nektóra dvojica H_0 porušuje. Počas testu hypotézu kladneme, budeme ďalej vyšetrovať, aká to je.

Veľčiny y_{ij} pre $i=1, \dots, I$ a $j=1, \dots, m_i$ sa dajú napísať tvarom

$$y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}, \text{ kde } \varepsilon_{ij} \text{ jsou navzájom nezávislé}$$

a rozdelené $N(0, \sigma^2)$

Napíšeme to maticovo:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{1m_1} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{2m_2} \\ \vdots \\ y_{I1} \\ \vdots \\ y_{Im_I} \end{pmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_X \underbrace{\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_I \end{pmatrix}}_{\mu} + \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1m_1} \\ \varepsilon_{21} \\ \vdots \\ \varepsilon_{2m_2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{I1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{Im_I} \end{pmatrix}}_e$$

neboli $Y = X\mu + e$, čo je lat. lineárny model.

X má se zosilať oňad neznámeho vektora μ metódou najmenších čtvercov.

Cieľom tejto metódy je minimalizovať druhou mocninu

chybového vektoru e , tj. spočítat

$$\min_{\mu} e'e = \min_{\mu} (Y - X\mu)'(Y - X\mu).$$

Řešení je $\hat{\mu} = (X'X)^{-1}X'Y$ (da' se to dokázat buď přes nějaké věty o maticích, nebo strochu rovnat po složkách, spočítat parciální derivace podle μ , a položit je = 0, a výsledek opět napravit maticově).

Velikost $S_e = (Y - X\hat{\mu})'(Y - X\hat{\mu})$ se nazývá residualní součet čtverců.

Protože matice X je velmi speciálního tvaru, daří se tyto hodnoty vyjádřit explicitně pomocí složek Y .

Označme $Y_{i.} = Y_{i1} + \dots + Y_{im_i}$, $\bar{Y}_i = \frac{Y_{i.}}{m_i}$

$$Y_{..} = Y_{1.} + \dots + Y_{I.} = \sum_i \sum_j Y_{ij}, \quad \bar{Y} = \frac{Y_{..}}{n}$$

kde $n = m_1 + \dots + m_I$

pak $X'X = \text{diag}(m_1, \dots, m_I)$

$$X'Y = (Y_{1.}, \dots, Y_{I.})'$$

$$\hat{\mu} = (\bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_I)'$$

$$S_e = \sum_i \sum_j Y_{ij}^2 - \sum_i \frac{Y_{i.}^2}{m_i} \quad \%$$

To je model na plátnosti alternativy.

%

$$S_e = \sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - 2 \sum_i \sum_j y_{ij} \bar{y}_i + \sum_i \sum_j \bar{y}_i^2$$

$$\bar{y}_i = \frac{1}{m_i} \sum_j y_{ij}$$

$$S_e = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - 2 \sum_i \frac{1}{m_i} \left(\sum_j y_{ij} \right)^2 + \sum_i \frac{1}{m_i^2} \left(\sum_j y_{ij} \right)^2 \underbrace{\sum_j 1}_{m_i} =$$

$$= \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - \sum_i \frac{1}{m_i} \left(\sum_j y_{ij} \right)^2$$

Na platnosti H_0 je model jednodušší, platí $y_{ij} = \mu + e_{ij}$,

maticově $Y = U\mu + e$, kde $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Odhad $\hat{\mu} = \underbrace{(U'U)^{-1}}_m \underbrace{U'Y}_{Y_{..}} = \frac{Y_{..}}{n} = \bar{Y}$

Residuální součet čtverců vyjde $S_T = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - \frac{Y_{..}^2}{n}$.

Koride $S_A = S_T - S_e = \sum_i \frac{Y_{i.}^2}{m_i} - \frac{Y_{..}^2}{n}$.

Platí, že residuální součet čtverců ^{rozdělení příslušnými d. volnosti} jsou nezávislémi odhady rozptylů ve svých modelech a mají χ^2 -rozdělení. Pro

veličina $F = \frac{(n-I)(S_T - S_e)}{(I-1)S_e}$ má rozdělení $F_{I-1, n-I}$ a hypotéza H_0

se bude zamítnat, když $F \geq F_{I-1, n-I}(\alpha)$ (kritická hodnota).

(reporich hypotéz ověří mala hodnota rozdílu rezidui)

To je model jednoduššího třídění, který se má používat třeba k testování plivu různých způsobů ověření na sledované veličiny (má pliv použitelný algoritmus na dobu zpracování údajů)

Klasický se vyplňuje tabule :

rozdání :

trída	hodnoty	číslost	součet	příměr
1	$y_{11} \dots y_{1m_1}$	m_1	$y_{1.}$	$\bar{y}_1$
$\vdots$				
I	$y_{I1} \dots y_{Im_I}$	m_I	$y_{I.}$	$\bar{y}_I$
cílem		n	$y_{..}$	

Výsledky - tabuľka analýzy rozptylu:

variabilita	source of variation	d.f. values	ratio S/f	F
factor	S_A	$f_A = I - 1$	S_A / f_A	F_A
residuals	S_e	$f_e = m - I$	S_e / f_e	-
total	S_T	$f_T = m - 1$	-	-

Zamilujeme-li hypotézu, budeme ešte testovať tzv. elementárnu kontrastu, tj. rozdiel priemeru $\bar{Y}_i - \bar{Y}_j$ po m. i a j, aby sme zistili, ktoré dvojice hypotéz porušujú.

Fisherova metóda

Hypotéza o rovnosti $\mu_i = \mu_j$ sa zamietá vždy platí

$$|\bar{Y}_i - \bar{Y}_j| \geq s \cdot q_{I, m-I}(\alpha) \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j} \right)}$$

$$\text{ kde } s = \sqrt{\frac{S_e}{m-I}}$$

a $q_{I, m-I}(\alpha)$ je kvantil kvantilovej

rovn. studentizovanej rozptylu, kde

je tabuľková

ad A)

Bartlettův test shodnosti rozptylů

Používá se k ověření hypotézy, že všechny výběry pocházejí ze základních souborů se stejným rozptylem. Označme I počet výběrů, n_i velikosti výběrů a s_i^2 jejich výběrové rozptyly pro $i = 1, \dots, I$. Dále označme

$$s^2 = \frac{1}{n-I} \sum_{i=1}^I (n_i - 1) s_i^2,$$

$$C = 1 + \frac{1}{3(I-1)} \left(\sum_{i=1}^I \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{n-I} \right),$$

kde $n = \sum_{i=1}^I n_i$. Pak veličina

$$B = \frac{1}{C} \left[(n-I) \ln s^2 - \sum_{i=1}^I (n_i - 1) \ln s_i^2 \right]$$

má za platnosti hypotézy přibližně χ^2 -rozdělení o $I - 1$ stupních volnosti, pokud $n_i > 6$, $i = 1, \dots, I$. Dostaneme-li $B \geq \chi_{I-1}^2(\alpha)$, zamítneme hypotézu na hladině, která je přibližně rovna α . Kritické hodnoty $\chi_n^2(\alpha)$ jsou tabelovány (publikace [4]). Tento test je ale citlivý na porušení předpokladu normality.

Pokud se hypotéza o rovnosti rozptylů namítně, dá se po test $H: \mu_1 = \dots = \mu_I$ použít následující kritérium.

Brownův a Forsythův test (pro nestejné rozptyly)

Test shody středních hodnot, který je vhodný pro obecnější testování shody k -tice středních hodnot, je-li definována hypotéza $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$.

Test vychází z k nezávislých výběrů pocházejících z normálního rozdělení.

Velikosti výběrů jsou n_i , $i = 1, \dots, k$. Jsou určeny také průměry $\bar{x}_i$ a rozptyly s_i^2 , $i = 1, \dots, k$. Testovací kritérium je formulováno vztahem

$$F = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (\bar{x}_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{n_i}{n}\right) s_i^2},$$

kde

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i \bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_i \sum_j x_{ij}$$

a

$$\bar{n} = \sum_{i=1}^k n_i.$$

Veličina F má za předpokladu platnosti hypotézy H_0 rozdělení F s $(k-1)$ a ν stupni volnosti. Platí-li, že $F > F_{k-1, \nu}(\alpha)$, hypotéza H_0 se zamítá. Počet stupňů volnosti ν se určí ze vztahu

$$\nu = \frac{1}{\sum_{i=1}^k \frac{o_i^2}{n_i - 1}},$$

kde

$$o_i = \frac{\left(1 - \frac{n_i}{n}\right) s_i^2}{\sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{n_i}{n}\right) s_i^2}.$$

data file: quicksorttime.STA [25 cases with 9 variables]

	<i>MN</i>	<i>M1</i>	<i>M3</i>	<i>M3-5</i>	<i>M3-7</i>	<i>M3-11</i>	<i>M3-17</i>	<i>M3-5-11</i>	<i>M3-5-17</i>
	1 VAR1	2 VAR2	3 VAR3	4 VAR4	5 VAR5	6 VAR6	7 VAR7	8 VAR8	9 VAR9
1	7.950	8.010	7.710	7.530	7.580	7.520	7.500	7.510	7.530
2	8.060	8.120	7.580	7.520	7.420	7.460	7.480	7.450	7.470
3	8.290	7.960	7.630	7.520	7.530	7.520	7.470	7.520	7.520
4	8.310	8.210	7.680	7.670	7.510	7.470	7.460	7.480	7.430
5	8.060	8.070	7.740	7.540	7.500	7.540	7.470	7.500	7.330
6	8.050	8.280	7.670	7.640	7.480	7.520	7.480	7.520	7.490
7	7.980	8.010	7.630	7.560	7.520	7.530	7.460	7.480	7.480
8	8.060	7.950	7.670	7.530	7.580	7.490	7.470	7.520	7.430
9	8.130	8.050	7.640	7.530	7.540	7.500	7.440	7.460	7.450
10	8.080	7.950	7.600	7.440	7.500	7.530	7.480	7.440	7.420
11	8.440	8.000	7.610	7.460	7.470	7.600	7.420	7.490	7.560
12	8.060	8.260	7.610	7.610	7.520	7.490	7.470	7.480	7.440
13	8.110	7.960	7.630	7.680	7.650	7.470	7.470	7.520	7.420
14	8.080	7.970	7.610	7.660	7.550	7.480	7.440	7.510	7.470
15	8.200	7.970	7.680	7.560	7.420	7.470	7.430	7.460	7.480
16	8.050	7.940	7.630	7.520	7.500	7.500	7.460	7.530	7.540
17	8.270	7.960	7.670	7.520	7.440	7.460	7.410	7.440	7.470
18	8.140	7.980	7.610	7.500	7.500	7.500	7.470	7.470	7.470
19	8.110	8.180	7.670	7.540	7.550	7.550	7.490	7.450	7.480
20	8.050	8.100	7.710	7.520	7.500	7.510	7.480	7.490	7.490
21	8.020	8.020	7.550	7.600	7.550	7.460	7.480	7.530	7.500
22	8.110	8.110	7.600	7.460	7.490	7.510	7.510	7.500	7.440
23	8.050	8.030	7.620	7.630	7.560	7.490	7.500	7.520	7.420
24	8.300	7.800	7.580	7.530	7.510	7.380	7.470	7.490	7.460
25	8.170	8.210	7.660	7.510	7.520	7.410	7.480	7.520	7.400

Data po Quicksort - mēfime cās

Příklad: Porovnáme metod M3, M3-5, M3-7, M3-11 (Quickstart)

na porovnávacích dĺž 1000000, máme čas.

Barlettův test shodnosti rozptylů:

	metoda	rozsař.	průměr	S_i^2	$\ln S_i^2$
1.	M3	25	7,64	0,002079	-6,175868
2.	M3-5	25	7,55	0,004286	-5,452401
3.	M3-7	25	7,52	0,002584	-5,958417
4.	M3-11	25	7,49	0,001967	-6,231246
	$\bar{I} = 4$	$n = 100$		0,010916	-23,817932

$$S^2 = \frac{1}{n-\bar{I}} \sum_{i=1}^{\bar{I}} (m_i-1) S_i^2 = \frac{1}{96} \sum_{i=1}^4 24 \cdot S_i^2 = \frac{24}{96} \sum_{i=1}^4 S_i^2 = 0,002729$$

$$\ln S^2 = -5,90382$$

$$C = 1 + \frac{1}{3(\bar{I}-1)} \left(\sum_{i=1}^{\bar{I}} \frac{1}{m_i-1} - \frac{1}{n-\bar{I}} \right) = 1 + \frac{1}{9} \left(\frac{4}{24} - \frac{1}{96} \right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{9} \cdot \frac{15}{96} = 1 + \frac{5}{288} = 1,017361$$

$$B = \frac{1}{C} \left((n-\bar{I}) \ln S^2 - \sum_{i=1}^{\bar{I}} (m_i-1) \ln S_i^2 \right) = \frac{1}{C} \left(96 \ln S^2 - 24 \sum_{i=1}^4 \ln S_i^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{1,017361} \left(-566,466424 + 571,63037 \right) = 4,780649$$

$$\chi^2_3(0,05) = 3,842$$

$$\chi^2_3(0,01) = 5,841$$

Hypotéza o rovnosti rozptylů se zamítá na hladině 0,05,

nemám se na hladině 0,01.

Jednoduché třídění: (při stejných rozptylech)

skupina	hodnoty	rozsah m_i	počet $Y_{i.}$	průměr $\bar{Y}_{i.}$	$\sum_j Y_{ij}^2$
1. M3	$Y_{11}, \dots, Y_{1,25}$	25	191	4,64	1459,1371
2. M3-5	$Y_{21}, \dots, Y_{2,25}$	25	188,75	4,55	1441,9789
3. M3-7	$Y_{31}, \dots, Y_{3,25}$	25	188	4,52	1412,1681
4. M3-11	$Y_{41}, \dots, Y_{4,25}$	25	182,25	4,49	1404,0475
celkem		$m = 100$	$Y_{..} = 755$	$\bar{Y}_{..} = 4,55$	5417,3311

souty čísel:

$$\begin{aligned} \text{residuální: } S_e &= \sum_{i,j} Y_{ij}^2 - \sum_i \frac{Y_{i.}^2}{m_i} = 5417,3311 - \frac{1}{25} \sum_{i=1}^4 Y_{i.}^2 = \\ &= 5417,3311 - \frac{1}{25} \cdot 142514,125 = 5417,3311 - 5700,565 = \\ &= 16,7661 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{celkový: } S_T &= \sum_{i,j} Y_{ij}^2 - \frac{Y_{..}^2}{n} = 5417,3311 - \frac{755^2}{100} = \\ &= 5417,3311 - 5700,25 = 17,0811 \end{aligned}$$

$$\text{řádkový: } S_A = S_T - S_e = \sum_i \frac{Y_{i.}^2}{m_i} - \frac{Y_{..}^2}{n} = 5700,565 - 5700,25 = 0,315$$

$$F = \frac{\frac{S_A}{I-1}}{\frac{S_e}{n-I}} = \frac{\frac{0,315}{3}}{\frac{16,7661}{96}} = \frac{0,105}{0,174647} = 0,601213$$

$$F_{3,96}(0,05) = 2,06$$

$$F_{3,96}(0,01) = 2,84$$

Hypotéza o rovnosti středních hodnot se nepamítá.

	součet čtverců S	st. volnosti f	S/f	$F = \frac{S/f}{R/(n-2)}$
řádky	0,315	3	0,105	0,601213
reziduální	16,7661	96	0,174647	—
celkový	17,0811	99	—	—

elementární kontrasty se tedy neprověřují

Pro porovnání: dvojnásobným t -testem na všech dvojicích výšek na hladině 0,01 nejvýznamnější pouze rozdíl mezi M3-5, M3-7 a M3-7, M3-11; na hladině 0,05 pouze rozdíl M3-7, M3-11.

Jednoduché třídní kamila hypotéza o rovnosti všech středů hodnocení celkovou pro chybně rozhodnutí α , takže je v kamilování opatrnější než dvojnásobné testy, které si mohou dovolit pro chyby α při každé jednoduché dvojici. Celková chyba rozhodování při použití dvojnásobných testů může být ale potom větší než α .

Když bychom přece jen porovnali elementární kontrasty:

$H: \mu_i = \mu_j$ proti $A: \mu_i \neq \mu_j$ se kamiká na hladině α , když

$$|\bar{y}_i - \bar{y}_j| \geq S q_{I, m-1}(\alpha) \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}$$

kde $S = \sqrt{\frac{S_e}{m-1}}$, $q_{I, m-1}(\alpha)$ je krit. hodnota sled. rozpětí

po nás $S = \sqrt{0,174647} = 0,4179$

$$\sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)} = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5} = 0,2$$

$$q_{4,96}(0,05) = 3,68 \quad q_{4,96}(0,01) = 4,5$$

přesná shama nerovnosti bude: 0,302544 po hladině 0,05
0,37611 ——— 0,01

el. kontrasty: $|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|$ $|\bar{y}_1 - \bar{y}_3|$ $|\bar{y}_1 - \bar{y}_4|$
 $|\bar{y}_2 - \bar{y}_3|$ $|\bar{y}_2 - \bar{y}_4|$
 $|\bar{y}_3 - \bar{y}_4|$

mají hodnoty: 0,09 0,12 0,15
0,03 0,06
0,03

řádný nepřekračuje hodnotu přesné shamy