

Příklady: (R. Moric, diplomová práce, 1998)

1) Algoritmus Quicksort

Proměňme rychlost následujících verzí Quicksortu:

M1 - jako dělicí bod se bere vždy první prvek posloupnosti
při dělení posloupnosti 12 se dostane Invertsortem

MN - dělicí bod se volí náhodně
při dělení posloupnosti 12 se dostane Invertsortem

M3 - dělicí bod se volí jako medián ze 3 prvků posloupnosti
při dělení posloupnosti 14 se dostane Invertsortem

M3-5 dělicí bod se bere jako medián ze 5 prvků posloupnosti
při dělení posloupnosti 1000 se přijde na M3

M3-7 dělicí bod se bere jako medián ze 7 prvků posloupnosti
při dělení posloupnosti 1500 se přijde na M3

M3-11 dělicí bod se bere jako medián ze 11 prvků posloupnosti
při dělení posloupnosti 2000 se přijde na M3

M3-17 dělicí bod se bere jako medián ze 17 prvků posloupnosti
při dělení posloupnosti 2500 se přijde na M3

M3-5-11 dělicí bod se bere jako medián ze 11 prvků
při dělení posloupnosti 2000 se přijde na M3-5

M3-5-17 dělicí bod se bere jako medián ze 17 prvků
při dělení posloupnosti 2500 se přijde na M3-5

Quickselect M1: $P(\text{delici' prvok} = k) = \frac{1}{N}$ pre $k = 1, \dots, N$

Quickselect M3: $P(\text{delici' prvok} = k) = \frac{(k-1) \cdot 1 \cdot (N-k)}{\binom{N}{3}}$

Quickselect M5: $P(\text{delici' prvok} = k) = \frac{\binom{k-1}{2} \cdot 1 \cdot \binom{N-k}{2}}{\binom{N}{5}}$

atol.

Pre $k = \frac{N+1}{2} = \text{median}$:

M1: $P = \frac{1}{N}$

M3: $P = \frac{(\frac{N+1}{2}-1)(N-\frac{N+1}{2})}{\binom{N}{3}} = \frac{\frac{N-1}{2} \cdot \frac{N-1}{2}}{\frac{N(N-1)(N-2)}{3 \cdot 2}} =$

$$= \frac{6(N-1)}{4N(N-2)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{N-1}{N-2} = \frac{3}{2N} \cdot \frac{N-2+1}{N-2} =$$

$$= \frac{3}{N} \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{N-2}\right) > \frac{1}{N} \cdot \frac{3}{2} =$$

Rekurzia po prveli porovnaní:

M1: $\bar{T}_N = N+1 + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\bar{T}_{k-1} + \bar{T}_{N-k})$, $\bar{T}_0 = 0$

M3: $\bar{T}_N = N+1 + \sum_{k=1}^N \frac{(k-1)(N-k)}{\binom{N}{3}} (\bar{T}_{k-1} + \bar{T}_{N-k})$

Měření probíhala na náhodně generovaných permutacích délky 10 000, 50 000, 100 000, 500 000, 1 000 000 a 5 000 000 prvků.

Pro každou novou algoritmus bylo generováno 25 permutací od každé délky (návazně).

Pro každou dvojici algoritmus byl použit dvojnásobný t-test po neslyšné rozptýlení. Hypotéza o rovnosti rozptýlení byla zamítnuta F-testem.

Testy se dělaly po naměřený čas i po počet porovnávání prvků.

U algoritmus H1 a H3 bylo možno provést experimentálně vyjádřený ocěňovaný počet porovnání a vyjádřit prvek s teoretickými výsledky. Gedgewick:

$$\text{po H1: } (N+1) \left(\frac{1}{3} H_{N+1} - \frac{1}{3} H_{N+2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{N+2} \right) + \frac{1}{2} \text{ vyjádřen}$$

$$(N+1) (2H_{N+1} - 2H_{N+2} + 1) \text{ porovnání}$$

$$\text{po H3: } \frac{12}{35} (N+1) (H_{N+1} - H_{N+2}) + \frac{37}{245} (N+1) - \frac{12}{7} \frac{N+1}{N+2} + 1 \text{ vyjádřen}$$

$$\frac{12}{7} (N+1) (H_{N+1} - H_{N+2}) + \frac{37}{49} (N+1) - \frac{24}{7} \frac{N+1}{N+2} + 2 \text{ porovnání}$$

kde N je délka třídění posloupnosti

H velikost vyjádřeného pole

$$H_N \text{ } N\text{-lé harmonické číslo} \quad H_N = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \sim \log N$$

pro velká N

Příloha D - Výsledky měření

1 000 000 prvků (MN, M1, M3)

MN	Výměny	Porovnání	Q-čas	I-čas	P-čas	Čas	M1	Výměny	Porovnání	Q-čas	I-čas	P-čas	Čas	M3	Výměny	Porovnání	Q-čas	I-čas	P-čas	Čas
1.	4103379	22993947	6.76	1.19	0.00	7.95	1.	4100362	23391548	6.84	1.17	0.00	8.01	1.	4094311	19850507	6.22	1.31	0.18	7.71
2.	4119446	23276284	6.88	1.18	0.00	8.06	2.	4109733	23693092	6.94	1.18	0.00	8.12	2.	4126967	19089632	6.09	1.31	0.18	7.58
3.	4069582	23737784	7.11	1.18	0.00	8.29	3.	4114931	22602791	6.77	1.19	0.00	7.96	3.	4098052	19640826	6.16	1.31	0.16	7.63
4.	4069707	24170348	7.12	1.19	0.00	8.31	4.	4051794	24107207	7.03	1.18	0.00	8.21	4.	4093828	20067844	6.28	1.32	0.08	7.68
5.	4096196	23172001	6.87	1.19	0.00	8.06	5.	4083053	23268242	6.88	1.19	0.00	8.07	5.	4064715	20258908	6.13	1.32	0.29	7.74
6.	4099978	23246733	6.87	1.18	0.00	8.05	6.	4054783	24534597	7.10	1.18	0.00	8.28	6.	4108642	19373468	6.19	1.32	0.16	7.67
7.	4125415	22366313	6.80	1.18	0.00	7.98	7.	4106845	22960107	6.84	1.17	0.00	8.01	7.	4090494	19629649	6.15	1.32	0.16	7.63
8.	4095886	23295256	6.88	1.18	0.00	8.06	8.	4103625	22791147	6.78	1.17	0.00	7.95	8.	4082225	19802586	6.17	1.32	0.18	7.67
9.	4087226	23526515	6.94	1.19	0.00	8.13	9.	4069077	23652237	6.87	1.18	0.00	8.05	9.	4100272	19489754	6.16	1.32	0.16	7.64
10.	4133189	22459671	6.91	1.17	0.00	8.08	10.	4087163	23237522	6.77	1.18	0.00	7.95	10.	4115292	19326990	6.12	1.32	0.16	7.60
11.	4064110	25462645	7.25	1.19	0.00	8.44	11.	4113420	23055301	6.82	1.18	0.00	8.00	11.	4105098	19565539	6.10	1.30	0.21	7.61
12.	4119635	22717431	6.88	1.18	0.00	8.06	12.	4068719	24453598	7.07	1.19	0.00	8.26	12.	4111603	19424510	6.15	1.32	0.14	7.61
13.	4111353	23028569	6.93	1.18	0.00	8.11	13.	4137795	22489281	6.78	1.18	0.00	7.96	13.	4108325	19427871	6.24	1.32	0.07	7.63
14.	4103966	23080786	6.91	1.17	0.00	8.08	14.	4118836	22799494	6.79	1.18	0.00	7.97	14.	4107414	19406223	6.18	1.32	0.11	7.61
15.	4096852	23673202	7.02	1.18	0.00	8.20	15.	4120516	22832905	6.79	1.18	0.00	7.97	15.	4082516	19754591	6.17	1.32	0.19	7.68
16.	4114932	22878928	6.87	1.18	0.00	8.05	16.	4115326	22636947	6.75	1.19	0.00	7.94	16.	4113465	19339860	6.22	1.31	0.10	7.63
17.	4093304	23564915	7.09	1.18	0.00	8.27	17.	4124258	22927205	6.78	1.18	0.00	7.96	17.	4110898	19387273	6.12	1.34	0.21	7.67
18.	4103100	23137536	6.96	1.18	0.00	8.14	18.	4106038	22846174	6.80	1.18	0.00	7.98	18.	4115370	19328065	6.12	1.32	0.17	7.61
19.	4107711	22727455	6.93	1.18	0.00	8.11	19.	4060726	24266218	7.00	1.18	0.00	8.18	19.	4103859	19486129	6.25	1.31	0.11	7.67
20.	4119262	22677338	6.88	1.17	0.00	8.05	20.	4088484	23539988	6.93	1.17	0.00	8.10	20.	4082030	20203015	6.25	1.33	0.13	7.71
21.	4114708	22964832	6.84	1.18	0.00	8.02	21.	4125048	22669153	6.83	1.19	0.00	8.02	21.	4099764	19585975	6.14	1.31	0.10	7.55
22.	4092603	22989545	6.92	1.19	0.00	8.11	22.	4091661	23873178	6.93	1.18	0.00	8.11	22.	4111102	19445783	6.15	1.32	0.13	7.60
23.	4111748	22811036	6.87	1.18	0.00	8.05	23.	4109483	22916798	6.84	1.19	0.00	8.03	23.	4096939	19678438	6.14	1.31	0.17	7.62
24.	4085347	23887645	7.12	1.18	0.00	8.30	24.	4129074	22315426	6.63	1.17	0.00	7.80	24.	4114048	19278849	6.07	1.31	0.20	7.58
25.	4122510	23123747	6.99	1.18	0.00	8.17	25.	4071611	23853352	7.03	1.18	0.00	8.21	25.	4103438	19616061	6.19	1.32	0.15	7.66
Σ	4102446	23238818	6.94	1.18	0.00	8.13	Σ	4098494	23268540	6.86	1.18	0.00	8.04	Σ	4101627	19578334	6.17	1.32	0.16	7.64

Příloha D - Výsledky měření

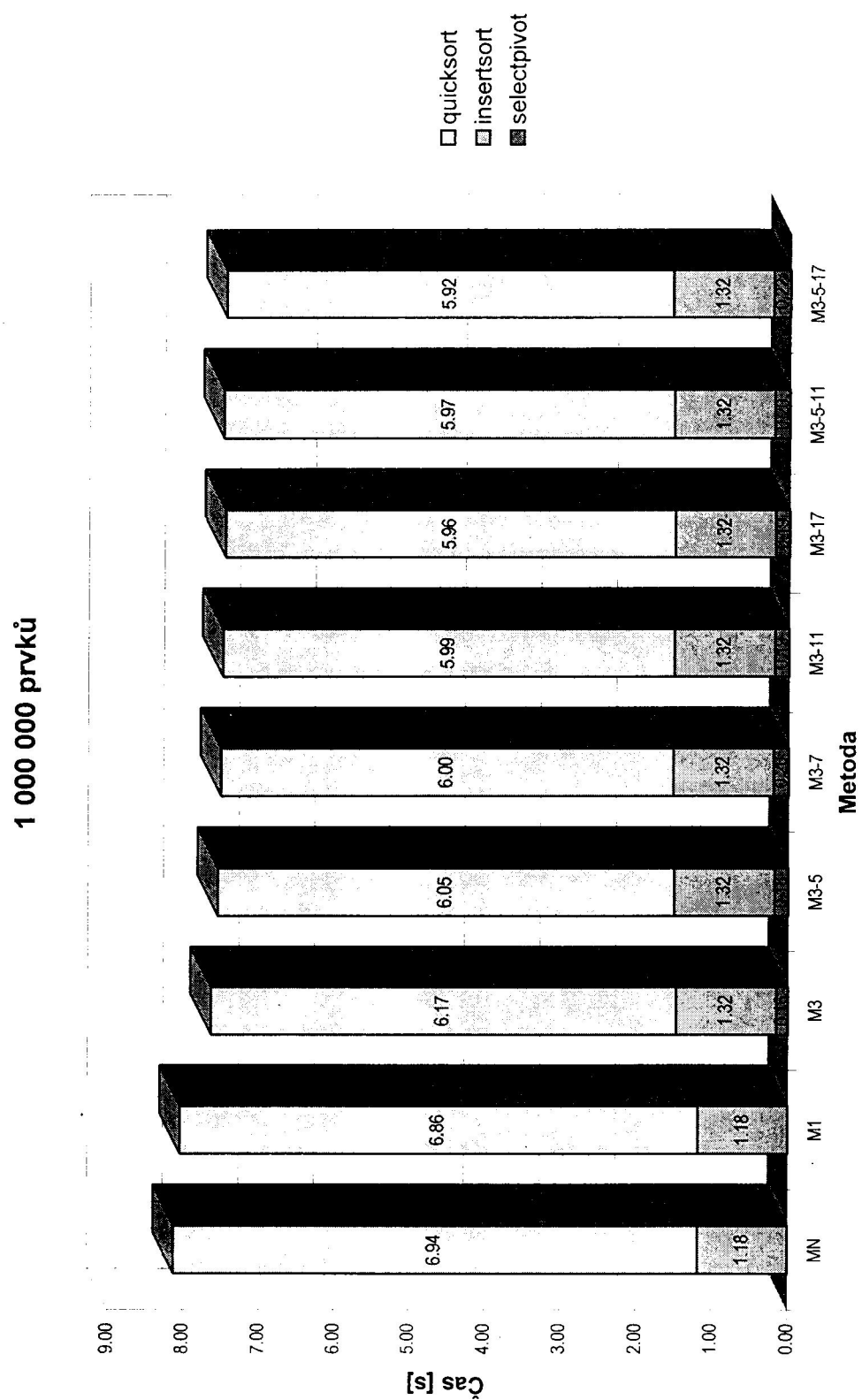
1 000 000 prvků (M3-5, M3-7, M3-11)

M3-5				M3-7				M3-11			
Výměny	Porovnáni	Q-čas	I-čas	P-čas	Čas	Výměny	Porovnáni	Q-čas	I-čas	P-čas	Čas
1. 4147609	18718203	6.02	1.32	0.19	7.53	1. 4141993	18767394	6.04	1.32	0.22	7.58
2. 4141989	18804058	6.09	1.32	0.11	7.52	2. 4169896	18427303	5.84	1.32	0.26	7.42
3. 4128414	18927047	6.02	1.32	0.18	7.52	3. 4151639	18632010	5.99	1.32	0.22	7.53
4. 4097717	19497416	6.19	1.32	0.16	7.67	4. 4160709	18492513	6.06	1.31	0.14	7.51
5. 4136822	18855763	5.95	1.32	0.27	7.54	5. 4167975	18421633	6.00	1.33	0.17	7.50
6. 4120426	19233823	6.13	1.33	0.18	7.64	6. 4160674	18510756	5.96	1.31	0.21	7.48
7. 4135716	18903814	6.03	1.31	0.22	7.56	7. 4152031	18608203	5.98	1.33	0.21	7.52
8. 4115144	19145621	6.03	1.32	0.18	7.53	8. 4154906	18575388	6.01	1.33	0.24	7.58
9. 4148146	18715768	5.99	1.32	0.22	7.53	9. 4153812	18595469	6.03	1.32	0.19	7.54
10. 4151433	18640744	5.89	1.32	0.23	7.44	10. 4152474	18608148	5.87	1.31	0.32	7.50
11. 4117503	19214123	5.95	1.31	0.20	7.46	11. 4162695	18489929	5.94	1.30	0.23	7.47
12. 4123040	19189433	6.06	1.32	0.23	7.61	12. 4138094	18739187	6.00	1.32	0.20	7.52
13. 4094823	19753937	6.23	1.31	0.14	7.68	13. 4159810	18527285	6.16	1.31	0.18	7.65
14. 4128710	19252620	6.19	1.32	0.15	7.66	14. 4141171	18850570	6.10	1.31	0.14	7.55
15. 4143241	18729263	6.04	1.32	0.20	7.56	15. 4165804	18447799	5.87	1.31	0.24	7.42
16. 4138294	18820438	6.02	1.33	0.17	7.52	16. 4146668	18664553	6.02	1.30	0.18	7.50
17. 4147777	18772992	6.03	1.32	0.17	7.52	17. 4154138	18620823	5.90	1.33	0.21	7.44
18. 4162110	18531921	5.98	1.33	0.19	7.50	18. 4158154	18552314	5.95	1.33	0.22	7.50
19. 4147318	18757503	6.05	1.32	0.17	7.54	19. 4164104	18448493	5.95	1.34	0.26	7.55
20. 4133686	18930090	6.02	1.31	0.19	7.52	20. 4152625	18635276	6.10	1.32	0.08	7.50
21. 4150928	18711428	6.05	1.36	0.19	7.60	21. 4169023	18403884	6.09	1.32	0.14	7.55
22. 4140644	18879041	6.01	1.31	0.14	7.46	22. 4159899	18492022	5.95	1.33	0.21	7.49
23. 4111156	19314007	6.16	1.32	0.15	7.63	23. 4144254	18844782	6.14	1.31	0.11	7.56
24. 4130162	18985204	6.05	1.32	0.16	7.53	24. 4162965	18459408	6.01	1.33	0.17	7.51
25. 4146554	18757105	6.05	1.32	0.14	7.51	25. 4147244	18659656	5.95	1.32	0.25	7.52
Ø 413574	18961654	6.05	1.32	0.18	7.55	Ø 4155710	18578992	6.00	1.32	0.20	7.52
						Ø 4168266	18407371	5.99	1.32	0.19	7.49

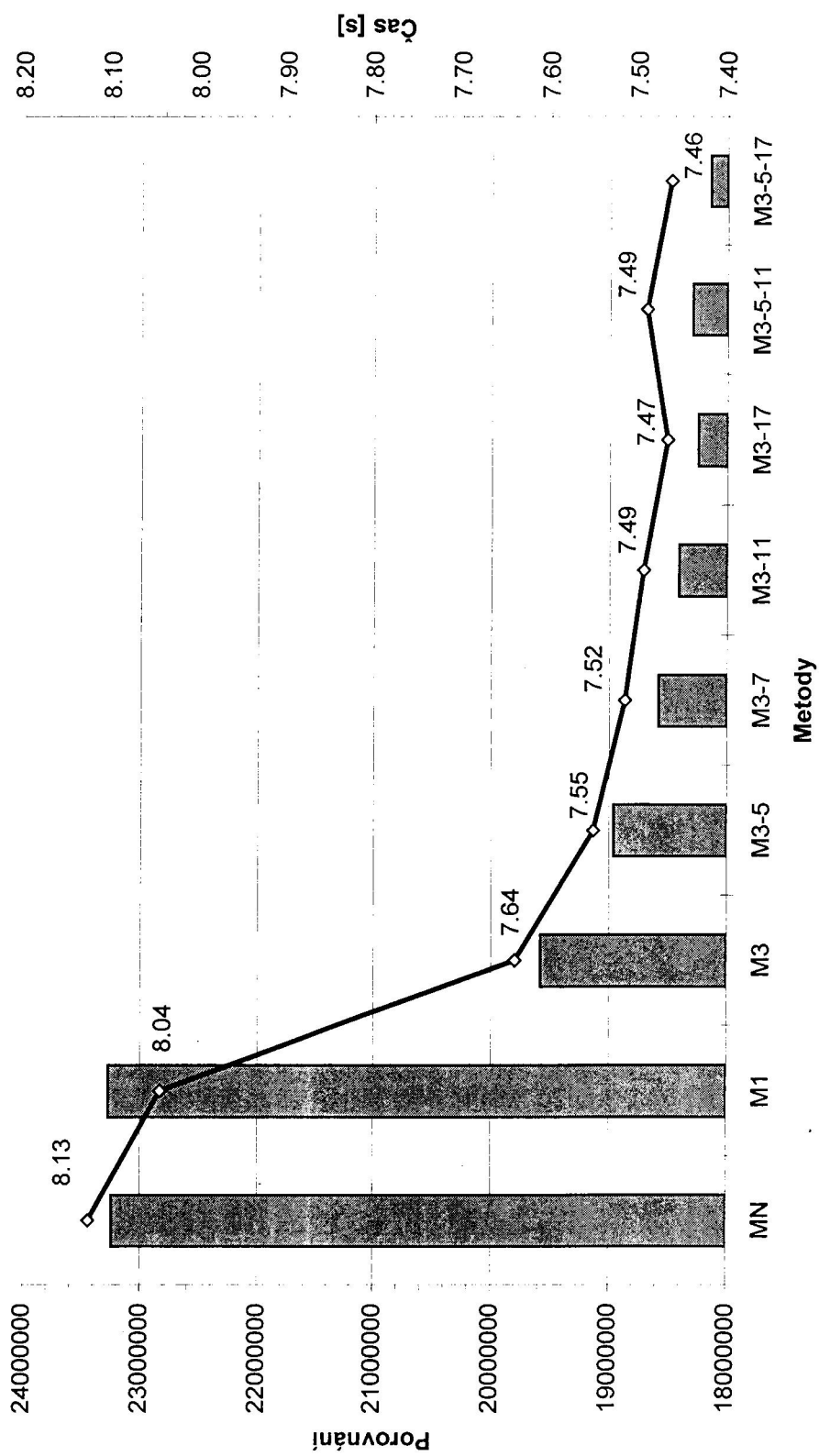
Příloha D - Výsledky měření

1 000 000 prvků (M3-17, M3-5-11, M3-5-17)

M3-17 Výměny Porovnátní				M3-5-11 Výměny Porovnátní				M3-5-17 Výměny Porovnátní			
Q-čas	I-čas	P-čas	Čas	Q-čas	I-čas	P-čas	Čas	Q-čas	I-čas	P-čas	Čas
1. 4185913	18187598	6.08	1.32	0.10	7.50	1. 4165451	18427648	5.99	1.32	0.20	7.51
2. 4182088	18243225	5.97	1.31	0.20	7.48	2. 4167819	18386611	5.88	1.32	0.25	7.45
3. 4173105	18321960	5.85	1.33	0.29	7.47	3. 4185592	18178258	6.01	1.31	0.20	7.52
4. 4185607	18191173	5.97	1.32	0.17	7.46	4. 4168732	18360542	5.93	1.33	0.22	7.48
5. 4190511	18148663	5.97	1.32	0.18	7.47	5. 4168469	18372645	6.04	1.32	0.14	7.50
6. 4169876	18396455	5.98	1.31	0.19	7.48	6. 4174980	18279975	6.04	1.32	0.16	7.52
7. 4184725	18221350	5.99	1.32	0.15	7.46	7. 4179244	18241365	5.95	1.32	0.21	7.48
8. 4189460	18167540	5.96	1.32	0.19	7.47	8. 4177717	18240232	5.94	1.32	0.26	7.52
9. 4184413	18222898	5.94	1.32	0.18	7.44	9. 4181280	18193458	5.94	1.32	0.20	7.46
10. 4186646	18190749	5.84	1.32	0.32	7.48	10. 4182452	18214271	5.89	1.32	0.23	7.44
11. 4185433	18167000	5.94	1.30	0.18	7.42	11. 4166722	18385924	6.00	1.32	0.17	7.49
12. 4181325	18271599	6.00	1.31	0.16	7.47	12. 4184337	18215625	5.99	1.32	0.17	7.48
13. 4181144	18272041	5.98	1.32	0.17	7.47	13. 4176651	18255726	5.98	1.32	0.22	7.52
14. 4181082	18258586	5.98	1.32	0.14	7.44	14. 4184300	18198140	5.97	1.33	0.21	7.51
15. 4182467	18226636	5.98	1.31	0.14	7.43	15. 4175522	18277951	5.96	1.32	0.18	7.46
16. 4185607	18203953	6.00	1.31	0.15	7.46	16. 4179761	18246365	5.99	1.32	0.22	7.53
17. 4173084	18356821	5.91	1.32	0.18	7.41	17. 4174191	18340425	5.97	1.32	0.15	7.44
18. 4186025	18209683	5.98	1.32	0.17	7.47	18. 4177887	18262518	5.97	1.32	0.18	7.47
19. 4180130	18244041	5.92	1.32	0.25	7.49	19. 4171166	18299680	5.93	1.31	0.21	7.45
20. 4176897	18305708	5.95	1.33	0.20	7.48	20. 4176069	18289410	6.02	1.33	0.14	7.49
21. 4175136	18310725	5.99	1.31	0.18	7.48	21. 4168660	18354701	5.96	1.32	0.25	7.53
22. 4189339	18161476	6.03	1.32	0.16	7.51	22. 4172658	18330111	5.92	1.32	0.26	7.50
23. 4185336	18201603	5.95	1.34	0.21	7.50	23. 4180115	18233531	5.99	1.32	0.21	7.52
24. 4178754	18273069	5.90	1.33	0.24	7.47	24. 4171958	18348173	5.98	1.32	0.19	7.49
25. 4170054	18417453	5.98	1.32	0.18	7.48	25. 4165250	18424750	6.02	1.32	0.18	7.52
Σ 4181766 18246880				5.96	1.32	0.19	7.47	Σ 4175079 18294321			
								5.97			
								1.32			
								0.20			
								7.49			
								Σ 4186807 18145008			
								5.92			
								1.32			
								0.22			
								7.46			



1 000 000 prvků



Podle tabulek z 25 měření milo láci, má délku 95%-ní spolehlivosti
 spolehlivosti měření auto kromu 0,86.

Příloha A - Zpracované výsledky měření

1 000 000 prvků

Výsledky měření: Čas

Metoda	Čas [s]	Výběr. rozptyl	Výběr. směr. odch.	Interval spolehlivosti
MN	8.13	0.013626	0.116730	(8.08, 8.17)
M1	8.04	0.013300	0.115326	(8.00, 8.09)
M3	7.64	0.002079	0.045596	(7.62, 7.66)
M3-5	7.55	0.004286	0.065468	(7.52, 7.58)
M3-7	7.52	0.002584	0.050833	(7.49, 7.54)
M3-11	7.49	0.001967	0.044355	(7.48, 7.51)
M3-17	7.47	0.000586	0.024201	(7.46, 7.48)
M3-5-11	7.49	0.000844	0.029057	(7.48, 7.50)
M3-5-17	7.46	0.002399	0.048980	(7.44, 7.48)

Výsledky měření: Počet porovnání

Metoda	Počet porovnání	Výběr. rozptyl	Výběr. směr. odch.	Interval spolehlivosti
MN	23238818	403721144977	635391	(22976542, 23501095)
M1	23268540	406033488151	637208	(23005514, 23531567)
M3	19578334	81924179464	286224	(19460186, 19696481)
M3-5	18961654	85797207388	292912	(18840746, 19082563)
M3-7	18578992	16128864929	126999	(18526569, 18631415)
M3-11	18407371	16528132450	128562	(18354303, 18460438)
M3-17	18246880	5213111204	72202	(18217077, 18276684)
M3-5-11	18294321	5517380011	74279	(18263660, 18324982)
M3-5-17	18145008	4541613402	67391	(18117190, 18172826)

F-test shody rozptylů

Klasický *F-test* umožňuje ověření nulové hypotézy $H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ proti alternativě $H_A: \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$. Vychází se z předpokladu, že oba výběry jsou nezávislé a pocházejí z normálního rozdělení. Testovací kritérium má tvar

$$F = \frac{s_x^2}{s_y^2}$$

za předpokladu $s_x^2 \geq s_y^2$ (v opačném případě výběry zaměníme). Platí-li hypotéza H_0 , má *F* kritérium *F-rozdělení* s $\nu_1 = (n_1 - 1)$ a $\nu_2 = (n_2 - 1)$ stupni volnosti. V opačném případě se pořadí stupňů volnosti zamění. Kritické hodnoty $F_{\alpha, n}(\alpha)$ jsou tabelovány (publikace [4]).

Dvouvýběrový t test

Mějme nezávislé výběry $x_1, \dots, x_{n_1}$ velikosti n_1 z $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ a $y_1, \dots, y_{n_2}$ velikosti n_2 z $N(\mu_y, \sigma_y^2)$. Označme $\bar{x}$, $\bar{y}$ jejich výběrové průměry a s_x^2 , s_y^2 jejich výběrové rozptyly. Dvouvýběrový *t* test umožňuje testovat hypotézu $H_0: \mu_x = \mu_y$ proti alternativní $H_A: \mu_x \neq \mu_y$.

1. Je-li $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$, má testovací kritérium tvar

$$T = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{(n_1 - 1)s_x^2 + (n_2 - 1)s_y^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}.$$

V případě platnosti hypotézy H_0 má tato testovaná charakteristika Studentovo rozdělení s $\nu = n_1 + n_2 - 2$ stupni volnosti. Platí-li, že $T > t_\nu(\alpha)$, je hypotéza H_0 o shodě středních hodnot na hladině významnosti α zamítnuta.

2. Je-li $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$, má testovací kritérium tvar

$$T = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n_1} + \frac{s_y^2}{n_2}}}.$$

Platí-li hypotéza H_0 , má tato testovaná statistika Studentovo rozdělení s „ekvivalentními“ stupni volnosti ν

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_x^2}{n_1} + \frac{s_y^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\frac{s_x^4}{n_1^2(n_1-1)}}{+} \frac{\frac{s_y^4}{n_2^2(n_2-1)}}}.$$

Platí-li, že $T > t_\nu(\alpha)$, je hypotéza H_0 o shodě středních hodnot na hladině významnosti α zamítnuta. Kritické hodnoty $t_\nu(\alpha)$ jsou tabelovány (publikace [4]).

Příloha C - Dvouvýběrový t test: Kritické hodnoty

1 000 000 prvků

F-test shody rozptylů

Por./Čas	MN	M1	M3	M3-5	M3-7	M3-11	M3-17	M3-5-11	M3-5-17
MN		1.02	6.01**	3.18**	5.27**	6.84**	23.27**	16.14**	9.03**
M1	1.01		5.87**	3.10**	5.15**	6.68**	22.71**	15.75**	8.81**
M3	4.93**	4.96**		1.89	1.14	1.14	3.87**	2.68**	1.50
M3-5	4.71**	4.73**	1.05		1.66	2.15*	7.32**	5.08**	2.84**
M3-7	25.03**	25.17**	5.08**	5.32**		1.30	4.41**	3.06**	1.71
M3-11	24.43**	24.57**	4.96**	5.19**	1.02		3.40**	2.36*	1.32
M3-17	77.44**	77.89**	15.72**	16.46**	3.09**	3.17**		1.44	2.58*
M3-5-11	73.17**	73.59**	14.85**	15.55**	2.92**	3.00**	1.06		1.79
M3-5-17	88.89**	89.40**	18.04**	18.89**	3.55**	3.64**	1.15	1.21	

Kritická hodnota na hladině 5% $F_{24,24}(0.05) = 1.984$ (překročení *)

Kritická hodnota na hladině 1% $F_{24,24}(0.01) = 2.659$ (překročení **)

Dvouvýběrový t test: Počet stupňů volnosti

Por./Čas	MN	M1	M3	M3-5	M3-7	M3-11	M3-17	M3-5-11	M3-5-17
MN		48	32	38	33	31	26	27	29
M1	48		32	38	33	31	26	27	29
M3	33	33		48	48	48	36	40	48
M3-5	34	34	48		48	48	30	33	39
M3-7	26	26	33	33		48	34	38	48
M3-11	26	26	33	33	48		37	48	48
M3-17	25	25	27	27	38	38		48	48
M3-5-11	25	25	27	27	39	38	48		48
M3-5-17	25	25	27	27	37	36	48	48	

Dvouvýběrový t test: Kritické hodnoty na hladině 5%

Por./Čas	MN	M1	M3	M3-5	M3-7	M3-11	M3-17	M3-5-11	M3-5-17
MN		2.01	2.04	2.03	2.04	2.04	2.06	2.06	2.05
M1	2.01		2.04	2.02	2.04	2.04	2.06	2.05	2.05
M3	2.03	2.03		2.01	2.01	2.01	2.03	2.02	2.01
M3-5	2.03	2.03	2.01		2.01	2.01	2.04	2.03	2.02
M3-7	2.06	2.06	2.03	2.04		2.01	2.03	2.02	2.01
M3-11	2.06	2.06	2.03	2.04	2.01		2.03	2.01	2.01
M3-17	2.06	2.06	2.05	2.06	2.02	2.03		2.01	2.01
M3-5-11	2.06	2.06	2.05	2.05	2.02	2.02	2.01		2.01
M3-5-17	2.06	2.06	2.06	2.06	2.03	2.03	2.01	2.01	

Dvouvýběrový t test: Kritické hodnoty na hladině 1%

Por./Čas	MN	M1	M3	M3-5	M3-7	M3-11	M3-17	M3-5-11	M3-5-17
MN		2.68	2.74	2.72	2.74	2.75	2.78	2.78	2.76
M1	2.68		2.74	2.71	2.74	2.74	2.78	2.77	2.76
M3	2.73	2.73		2.68	2.68	2.68	2.72	2.71	2.68
M3-5	2.73	2.73	2.68		2.68	2.68	2.75	2.73	2.71
M3-7	2.79	2.79	2.73	2.74		2.68	2.73	2.71	2.68
M3-11	2.79	2.79	2.73	2.74	2.68		2.72	2.68	2.68
M3-17	2.80	2.80	2.77	2.78	2.71	2.72		2.68	2.68
M3-5-11	2.80	2.80	2.77	2.77	2.71	2.71	2.68		2.68
M3-5-17	2.80	2.80	2.78	2.78	2.72	2.72	2.68	2.68	

Dvouvýběrový t test

Por./Čas	MN	M1	M3	M3-5	M3-7	M3-11	M3-17	M3-5-11	M3-5-17
MN		2.47*	19.37**	21.44**	23.94**	25.26**	27.58**	26.35**	26.13**
M1	0.17		16.30**	18.58**	20.96**	22.24**	24.46**	23.24**	23.16**
M3	26.26**	26.41**		5.54**	9.08**	11.41**	16.66**	13.72**	13.15**
M3-5	30.57**	30.71**	7.53**		2.15*	3.59**	5.99**	4.19**	5.36**
M3-7	35.96**	36.09**	15.96**	5.99**		1.57	4.26**	2.08*	3.68**
M3-11	37.26**	37.39**	18.66**	8.66**	4.75**		2.65*	0.30	2.33*
M3-17	39.03**	39.15**	22.55**	11.85**	11.37**	5.44**		3.12**	0.37
M3-5-11	38.65**	38.77**	21.71**	11.04**	9.67**	3.81**	2.29*		2.42*
M3-5-17	39.86**	39.98**	24.37**	13.59**	15.09**	9.04**	5.16**	7.44**	

(50a)

Testujeme rovnost $M1$ proti $M3$ (čas) párovaním t-testem obousměrně:

$$Z_i = X_i - Y_i, \text{ kde } X_i \dots M_1, Y_i \dots M_3$$

$$Z_1 = 0,30$$

$$\bar{Z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i = 0,4044$$

$$Z_2 = 0,54$$

$$S_Z^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2 = 0,012659$$

$$Z_3 = 0,33$$

$$Z_4 = 0,53$$

$$S_Z = \sqrt{S_Z^2} = 0,1125$$

$$Z_5 = 0,33$$

$$Z_6 = 0,61$$

$$|\bar{T}_Z| = \frac{\bar{Z}}{S_Z} \sqrt{n} = 14,97$$

$$Z_7 = 0,38$$

$$Z_8 = 0,28$$

kritické hodnoty: $t_{24}(0,05) = 2,0639$

$$Z_9 = 0,41$$

$$Z_{10} = 0,35$$

$$t_{24}(0,01) = 2,7969$$

$$Z_{11} = 0,39$$

$$Z_{12} = 0,65$$

Hypotéza o rovnosti se odmítá na obou hladinách.

$$Z_{13} = 0,33$$

$$Z_{14} = 0,36$$

Jednosměrný t-test $H: M1 = M3$ proti $A: M1 > M3$:

$$Z_{15} = 0,29$$

$$Z_{16} = 0,31$$

H se odmítá, když $|\bar{T}_Z| \geq t_{n-1}(2\alpha)$

$$Z_{17} = 0,29$$

kritické hodnoty: $t_{24}(0,1) = 1,7109$

$$Z_{18} = 0,37$$

$$Z_{19} = 0,51$$

$$t_{24}(0,02) = 2,492$$

$$Z_{20} = 0,39$$

$$Z_{21} = 0,47$$

Hypotéza se odmítá, přijímáme alternativu,

$$Z_{22} = 0,51$$

$$Z_{23} = 0,41$$

že algoritmus $M3$ je rychlejší než $M1$.

$$Z_{24} = 0,22$$

$$Z_{25} = 0,55$$

Testujeme hypotézu $H: \mu_1 = \mu_3$ (přes) proti $A: \mu_1 \neq \mu_3$

dvoubokový t -testem:

a) při stejných rozptylech

$$\bar{X} = 8,04 \quad S_X^2 = 0,0133 \quad n_1 = 25 \quad \mu_0 \mu_1$$

$$\bar{Y} = 7,64 \quad S_Y^2 = 0,0021 \quad n_2 = 25 \quad \mu_0 \mu_3$$

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\left((n_1 - 1) S_X^2 + (n_2 - 1) S_Y^2 \right)^{1/2}} \left(\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2} \right)^{1/2} =$$

$$= \frac{8,04 - 7,64}{\left(24 \cdot 0,0133 + 24 \cdot 0,0021 \right)^{1/2}} \left(\frac{25^2 \cdot 48}{50} \right)^{1/2} =$$

$$= \frac{0,4}{0,6079} \cdot 24,4949 = 16,1177$$

kritické hodnoty: $t_{48}(0,05) = 2,009$

$$t_{48}(0,01) = 2,678$$

Hypotéza o rovnosti se zamítá

Jednosměrný t -test $H: \mu_1 = \mu_3$ proti $A: \mu_1 > \mu_3$

kritické hodnoty: $t_{48}(0,1) = 1,676$

$$t_{48}(0,02) = 2,403$$

Hypotéza se zamítá se směrem alternativy, že μ_3 je rychlejší než μ_1 .

b) při neslyšných rozptylech

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\left(\frac{S_x^2}{m_1} + \frac{S_y^2}{m_2} \right)^{1/2}} = \frac{8,04 - 7,64}{\left(\frac{0,0133}{25} + \frac{0,0021}{25} \right)^{1/2}} = \frac{0,4}{0,0248} = 16,129$$

stejně volnosti:

$$v = \frac{\left(\frac{S_x^2}{m_1} + \frac{S_y^2}{m_2} \right)^2}{\frac{S_x^4}{m_1^2(m_1-1)} + \frac{S_y^4}{m_2^2(m_2-1)}} = \frac{0,0248^2}{\frac{0,0133^2 + 0,0021^2}{25^2 \cdot 24}} = \frac{0,00569}{0,00048} =$$

$$= 31,61 \approx 32$$

H se zaměřila obousměrně, když $|T| \geq t_v(\alpha)$

kritické hodnoty: $t_{32}(0,05) = 2,042$

$$t_{32}(0,01) = 2,750$$

H se zaměřila proti $A: M1 > M3$, když $T \geq t_{32}(2\alpha)$

kritické hodnoty: $t_{32}(0,1) = 1,697$

$$t_{32}(0,02) = 2,457$$

Ročník se zaměřil ve prospěch alternativy, že $M3$ je rychlejší než $M1$.

Test shoddy rozptylů

$$H: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \text{ proti } A: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

$$\text{hypotéza se odmítá, když } F = \frac{S_X^2}{S_Y^2} \geq F_{n_1-1, n_2-1} \left(\frac{\alpha}{2} \right)$$

(na příkladu, že $S_X^2 \geq S_Y^2$ - v opačném případě se poradi výběru pohodi')

$$F = \frac{0,0133}{0,0021} = 6,33$$

$$\text{kritická hodnota } F_{24, 24} (0,025) = 2,269$$

$$F_{24, 24} (0,005) = 2,967$$

Hypotéza o shodě rozptylů se odmítá.

Účel t - testu při 25 měřeních:

a) paionj

na hladině $\alpha = 0,05$ a proti 0,9 test rozezná rozdíl mezi

skutnými hodnotami velikosti 0,66, tj. 0,0675

b) dvojnásobný při stejných rozptylech (bereme větší σ)

rozezná rozdíl mezi skt. hodnotami velikosti 0,856,

tj. 0,098

test nerovnosti ztēri.

X ... čas po M1

Y ... čas po M3

zjtēronj korelačnē koeficient : $r = \frac{S_{xy}}{S_x S_y}$

$$S_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n-1} \left(\sum_i x_i y_i - n \bar{x} \bar{y} \right) =$$

$$= \frac{1}{25} (1536,3562 - 25 \cdot 8,044 \cdot 4,6396) = 0,00136$$

$$S_x = 0,115326$$

$$S_y = 0,045596$$

$$\text{tjide } r = 0,2586$$

$$\text{kritická hodnota } r_{25}(0,05) = 0,3961$$

Hypotēza nerovnosti se nepamitā.

TAB. 10 B ROZSAHY VÝBĚRŮ PŘI PŘEDEPSANÉ SÍLE TESTU PRO $\mu_1 - \mu_2$ (σ^2 NEZNÁMÉ)

Δ	α			
	0,005	0,01	0,025	0,05
	β	β	β	β
	0,8 0,9 0,95 0,99	0,8 0,9 0,95 0,99	0,8 0,9 0,95 0,99	0,8 0,9 0,95 0,99
0,20				
0,25				
0,30				
0,35				
0,40				
0,45	118	101	79 105	62 86 108
0,50	96	82 106	64 86 106	51 70 88
0,55	79 101	68 88 106	53 71 87	42 58 73 112
0,60	67 85 101	58 74 90	45 60 74 104	36 49 61 89
0,65	57 73 87	49 64 77 104	39 51 63 88	30 42 52 76
0,70	50 63 75 100	43 55 66 90	34 44 55 76	26 36 45 66
0,75	44 55 66 88	38 48 58 79	29 39 48 67	23 32 40 57
0,80	39 49 58 77	33 43 51 70	26 34 42 59	21 28 35 50
0,85	35 43 51 69	30 38 46 62	23 31 37 52	18 25 31 45
0,90	31 39 46 62	27 34 41 55	21 27 34 47	16 22 28 40
0,95	28 35 42 55	24 31 37 50	19 25 30 42	15 20 25 36
1,00	26 32 38 50	22 28 33 45	17 23 27 38	14 18 23 33
1,10	22 27 32 42	19 23 28 38	14 19 23 32	12 15 19 27
1,20	18 23 27 36	16 20 24 32	12 16 20 27	10 13 16 23
1,30	16 20 23 31	14 17 21 28	11 14 17 23	9 11 14 20
1,40	14 17 20 27	12 15 18 24	10 12 15 20	8 10 12 17
1,50	13 15 18 24	11 14 16 21	9 11 13 18	7 9 11 15
1,60	11 14 16 21	10 12 14 19	8 10 12 16	6 8 10 14
1,70	10 13 15 19	9 11 13 17	7 9 11 14	6 7 9 12
1,80	10 11 13 17	8 10 12 15	6 8 10 13	5 7 8 11
1,90	9 11 12 16	8 9 11 14	6 7 9 12	5 6 7 10
2,00	8 10 11 14	7 9 10 13	6 7 8 11	4 6 7 9
2,10	8 9 10 13	7 8 9 12	5 6 8 10	4 5 6 8
2,20	7 8 10 12	6 7 9 11	5 6 7 9	4 5 6 8
2,30	7 8 9 11	6 7 8 10	5 6 7 9	4 5 5 7
2,40	6 8 9 11	6 7 8 10	4 5 6 8	4 4 5 7
2,50	6 7 8 10	5 6 7 9	4 5 6 8	3 4 5 6
3,00	5 6 6 8	4 5 6 7	4 4 5 6	3 4 5
3,50	4 5 5 6	4 4 5 6	3 4 4 5	3 4 4
4,00	4 4 5 6	3 4 4 5	3 4 4	4

Ověření normality po porovnání čas algoritmu M_1 :

(předpokládáme známé parametry $\mu = 8,04$, $\sigma = 0,115326$)

porovnání rozdílů podle hodnot do intervalů:

Interval	číslo m_i	$\frac{m_i}{n}$	p_i korekce	mp_i
$(-\infty; 7,85)$	1	0,04	0,04947	1,23675
$(7,85; 7,9)$	0	0	0,06367	1,59175
$(7,9; 7,95)$	1	0,04	0,10456	2,614
$(7,95; 8)$	8	0,32	0,14547	3,63675
$(8; 8,05)$	5	0,2	0,17269	4,31725
$(8,05; 8,1)$	2	0,08	0,16261	4,06525
$(8,1; 8,15)$	3	0,12	0,13047	3,26175
$(8,15; 8,2)$	1	0,04	0,0888	2,22
$(8,2; 8,25)$	2	0,08	0,04788	1,194
$(8,25; 8,3)$	2	0,08	0,02216	0,554
$(8,3; \infty)$	0	0	0,01222	0,30555
počet = 11	25	1		

$$p_1 = P(m_i < 7,85) = \Phi\left(\frac{7,85 - 8,04}{0,115326}\right) = \Phi(-1,6475) = 0,04947$$

$$p_2 = P(7,85 < m_i \leq 7,9) = \Phi\left(\frac{7,9 - 8,04}{0,115326}\right) - \Phi\left(\frac{7,85 - 8,04}{0,115326}\right) =$$

$$= \Phi(-1,2139) - \Phi(-1,6475) = 0,11314 - 0,04947 = 0,06367$$

ald.

vypočítam $\chi^2 = \sum_{i=1}^{11} \frac{(m_i - mp_i)^2}{mp_i} = \sum_{i=1}^{11} \frac{m_i^2}{mp_i} - n =$

$$= 39,3355 - 25 = 14,3355$$

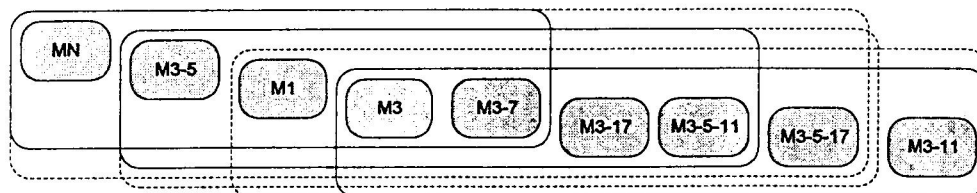
kritická hodnota $\chi_{10}^2(0,05) = 18,31$

Hypotéza o tom, že výber pochádza z rozdelenia $N(\mu, \sigma^2)$, se neramila.

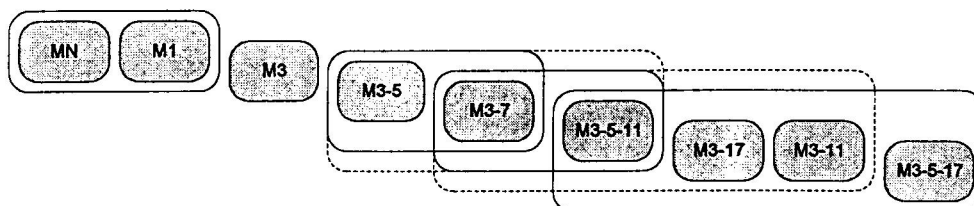
Pror: nebola splnená podmienka, že $mp_i \geq 5$ pre všetky i , takže aproximácie χ^2 -rozdelením nemusi byť dosť presná.

10 000 prvků

Čas

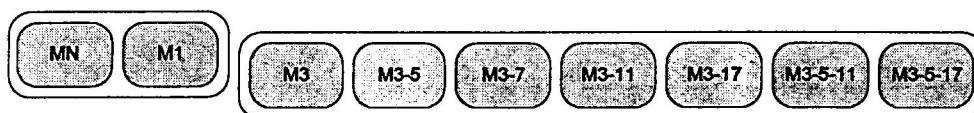


Počet porovnání

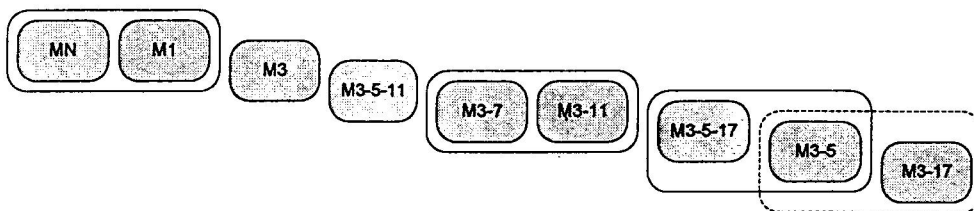


50 000 prvků

Čas

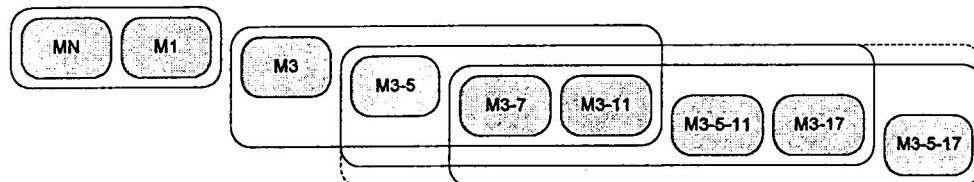


Počet porovnání

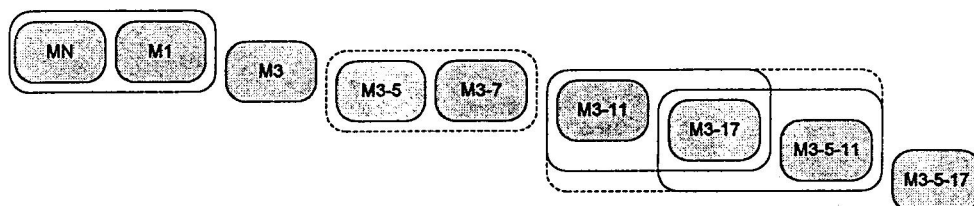


100 000 prvků

Čas

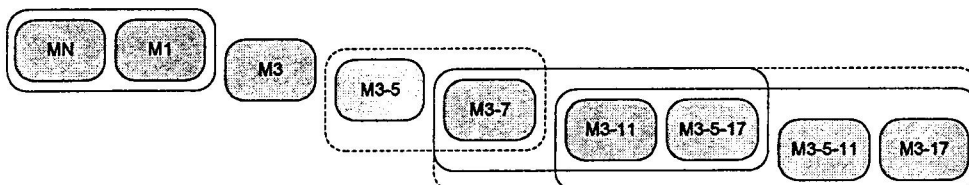


Počet porovnání

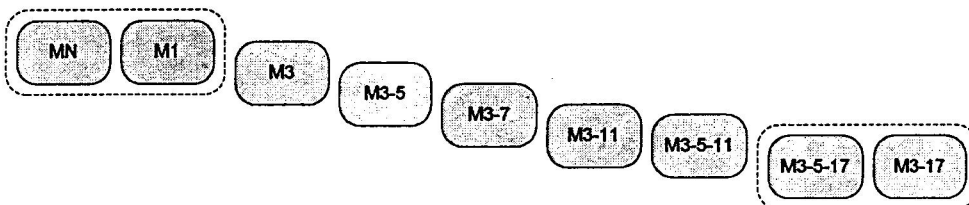


500 000 prvků

Čas

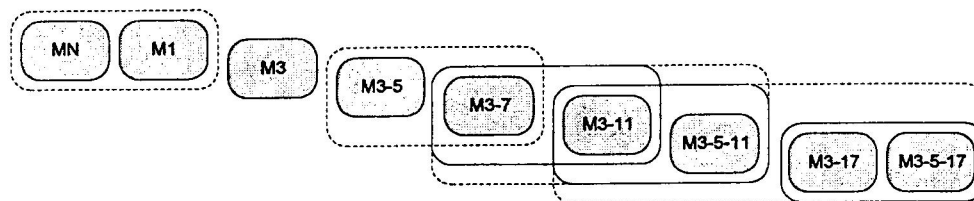


Počet porovnání

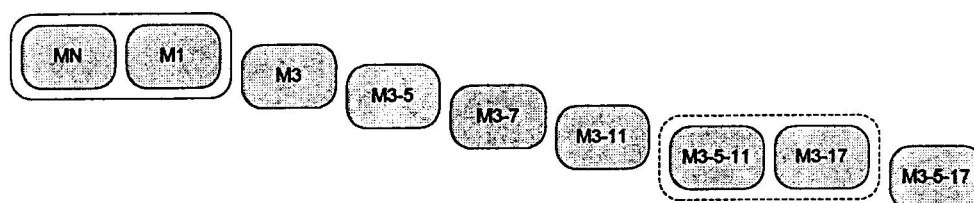


1 000 000 prvků

Čas

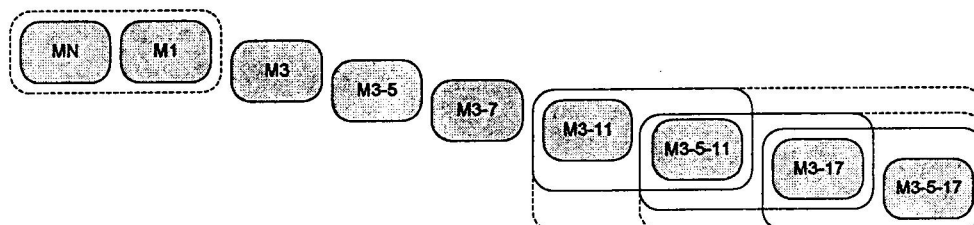


Počet porovnání

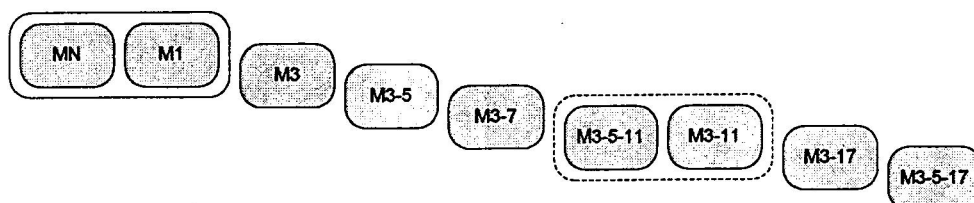


5 000 000 prvků

Čas



Počet porovnání



Tabulka 7.2 - Počet volání funkce quicksort()

	10 000	50 000	100 000	500 000	1 000 000	5 000 000
M1	1 430	7 140	14 290	71 430	142 860	714 300
M3	1 070	5 360	10 710	53 570	107 140	535 710

Tabulka 7.3 - Počet výměn - výpočet a měření

Velikost pole	M1		M3	
	výpočet	měření	výpočet	měření
10 000	22 740	22 710	22 409	23 040
50 000	140 523	140 200	139 600	143 000
100 000	304 100	304 000	303 000	308 900
500 000	1 789 000	1 742 000	1 791 000	1 808 000
1 000 000	3 809 000	3 812 000	3 819 000	3 887 000
5 000 000	21 727 000	21 701 000	21 856 000	23 169 000

Tabulka 7.4 - Počet porovnání - výpočet a měření

Velikost pole	M1		M3	
	výpočet	měření	výpočet	měření
10 000	140 700	140 200	115 300	117 700
50 000	864 600	865 500	714 200	722 700
100 000	1 868 000	1 874 000	1 547 000	1 577 000
500 000	10 948 000	10 658 000	9 115 000	9 149 999
1 000 000	23 282 000	23 260 000	19 419 000	19 570 000
5 000 000	132 506 000	132 814 000	110 888 000	111 714 000

Je vidět, že mimo srovnání počtu výměn u metody M3, kde se vyskytuje systematická odchylka neznámého původu, jsou teoretické výsledky v poměrně dobré shodě s měřeními.

(Teoretické hodnoty počítané podle Sedgewicka)