

Testy hypotéz o parametrech n -normálního rozdělení

Hypotéza = nějaké tvrzení o hodnotě parametru, např.

$$H: \mu = \mu_0 \quad \dots \text{jednoduchá hypotéza}$$

$$\left. \begin{array}{l} H: \mu \geq \mu_0 \\ H: \mu \leq \mu_0 \end{array} \right\} \text{složení hypotéza}$$

alternativa = možnost, že kterou postavíme v případě, že hypotéza neplatí, např.

$$A: \mu = \mu_1 \quad \dots \text{jednoduchá alternativa}$$

$$A: \mu \neq \mu_0 \quad \dots \text{složení alternativa dvoustranná}$$

$$\left. \begin{array}{l} A: \mu > \mu_0 \\ A: \mu < \mu_0 \end{array} \right\} \text{složení alternativa jednostranná}$$

testuje se např. $H: \mu = \mu_0$ proti $A: \mu \neq \mu_0$

nebo $H: \mu \geq \mu_0$ proti $A: \mu < \mu_0$ atd.

Každé při testování je buď: hypotézu přijmeme

nebo: hypotézu nepřijmeme

neříká se, že hypotézu přijímáme nebo že platí

každé je vždy natíženo nějakou chybou

chyba 1. druhu ... přijmeme hypotézu, ačkoli je pravda

chyba 2. druhu ... nepřijmeme hypotézu, ačkoli pravda není

značíme $P(\text{chyba 1. druhu}) = \alpha$

$P(\text{chyba 2. druhu}) = \beta$

Ideální by bylo, kdyby se daly obě tyto podmínky současně minimalizovat, nebo předejít zvolit tak malé, jak bychom si přáli - to se ale obvykle nedaří splnit (např. při kmenování α a β). Pravě obvyklý postup je: zvolit se α dostatečně malé, ale nepřehnaně malé (např. $\alpha = 0,05$ nebo $\alpha = 0,01$)

při tomto α se konstruuje test tak, aby β bylo co nejmenší α ... hladina významnosti testu

test hypotéz se opět skládá na nějaké hodnotě vyčíslení z pozorovaných hodnot; padne-li do kritického oboru, hypotéza se zamítá, padne-li mimo kritický obor, hypotéza se nezamítá

Test $H: \mu = \mu_0$ při známém rozptylu σ^2

jednostranný test: $H: \mu = \mu_0$ proti $A: \mu > \mu_0$

test se redukuje na odhadu $\bar{X}$

velké hodnoty $\bar{X}$ budou svědčit ve prospěch alternativy

kritický obor bude $\bar{X} \geq k$, kde k musíme nějak určit

pomocí transformací $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$ za platnosti H

platí: $P(T \geq u'_\alpha) = \alpha$, když u'_α je kritická hodnota rozdělení $N(0,1)$

(to je definice)

$$\text{tedy } \alpha = P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq u'_\alpha\right) = P\left(\bar{X} \geq \underbrace{\mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u'_\alpha}_{\text{hledané } k}\right)$$

je to rovněž test $H: \mu \leq \mu_0$ proti $A: \mu > \mu_0$

$\bar{X} \geq \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u'_\alpha$ je kritický obor, hypotéza se zamítá

nebo $\bar{X} < \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u'_\alpha$ se nezamítá

je-li $\mu = \mu_0$ (H platí), máme $\mu > \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u'_\alpha$

$$P(\mu > \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u'_\alpha) = 1 - \alpha$$

je tedy $(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u'_\alpha; \infty)$ interval spolehlivosti pro μ

vztah mezi kritickou hodnotou a kvantilem:

$$P(X < u_\alpha) = \alpha \quad \text{kvantil}$$

$$P(X \geq u'_\alpha) = \alpha \quad \text{kritická hodnota}$$

$$\text{platí } u'_\alpha = u_{1-\alpha}, \text{ neboť } P(X \geq u_{1-\alpha}) = 1 - P(X < u_{1-\alpha}) = 1 - (1 - \alpha) = \alpha$$

Hypotéza se tedy dá ekvivalentně testovat pomocí intervalu spolehlivosti.

podobně test $H: \mu = \mu_0$ proti $A: \mu < \mu_0$

oboustranný test $H: \mu = \mu_0$ proti $\mu \neq \mu_0$ má kritický obor

$$|\bar{X} - \mu_0| \geq k$$

$$k \text{ se určí z podmínky, že } P\left(\frac{|\bar{X} - \mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq u'_{\alpha/2}\right) =$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq u'_{\alpha/2}\right) + P\left(-\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq -u'_{\alpha/2}\right) = \alpha/2 + \alpha/2 = \alpha$$

$$\text{tedy } |\bar{X} - \mu_0| \geq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u'_{\alpha/2} \quad \left(= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}\right)$$

↑

kvantil

obvyklý výpočet kritického oboru je, že se hodnotí

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \text{ porovnááme s kritickou hodnotou rozdílů}$$

Testy pro $H: \mu = \mu_0$ při neznámém σ^2

vezme se $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$ za předpokladu hypotézy

odvodi se stejně, jen kritické hodnoty se nahradí krit.

hodnotami t -rozdělení

např. $H: \mu = \mu_0$ proti $A: \mu \neq \mu_0$ se namíří, když

$$T = \frac{|\bar{X} - \mu_0|}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \geq t'_{n-1, \alpha} \quad (= t_{n-1, 1-\alpha/2})$$

↑
kvantil

Test $\sigma^2 = \sigma_0^2$

test $H: \sigma^2 = \sigma_0^2$ proti $A: \sigma^2 > \sigma_0^2$

H se namíří, když $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \geq \chi^2_{n-1, \alpha}$

test $H: \sigma^2 = \sigma_0^2$ proti $A: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

H se namíří, když $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \geq \chi^2_{n-1, \alpha/2}$

nebo $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{n-1, 1-\alpha/2}$

test $H: \sigma^2 = \sigma_0^2$ proti $A: \sigma^2 < \sigma_0^2$

H se namíří, když $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{n-1, 1-\alpha}$

P-hodnota

Začala se používat až s rozvojem výpočetní techniky, spíše jako tabulkami
by to bylo nere realizovatelné

P-hodnota je nejmenší hladina, při které bychom ještě hypotézu zamítli.

Příklad: Opět quicksort, varianta H1, měříme čas

mám $n = 25$, $\bar{x} = 8,044$, $S = 0,115$

budu testovat hypotézu $H: \mu = 8$ proti $A: \mu \neq 8$

$$T = \frac{|\bar{x} - 8|}{\frac{S}{\sqrt{25}}} = \frac{0,044}{0,115} \cdot 5 = 1,913$$

kritická hodnota $t'_{24}(0,05) = 2,064$

$$t'_{24}(0,1) = 1,711$$

Tedy hypotéza se nepřímá na hladině 5%, ale zamítá se na hladině 10% (tj. když se směřím o větší pravděpodobnosti chyby).

ještě otestuji hypotézu o rozptylu: $H: \sigma^2 = 0,01$, tj. $\sigma^2 = 0,01$

$$A: \sigma^2 \neq 0,01$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{24 \cdot 0,115^2}{0,01} = 31,74$$

kritické hodnoty: $\chi'^2_{24}(0,05) = 36,42$ $\chi'^2_{24}(0,975) = 12,40$

Hypotéza se nepřímá.

data file: quicksort.sta [25 cases with 10 variables]

	MN	M1	M3	M3-5	M3-4	M3-11	M3-17	M3-5-11	M3-5-17
	1 VAR1	2 VAR2	3 VAR3	4 VAR4	5 VAR5	6 VAR6	7 VAR7	8 VAR8	9 VAR9
1	7.950	8.010	7.710	7.530	7.580	7.520	7.500	7.510	7.530
2	8.060	8.120	7.580	7.520	7.420	7.460	7.480	7.450	7.470
3	8.290	7.960	7.630	7.520	7.530	7.520	7.470	7.520	7.520
4	8.310	8.210	7.680	7.670	7.510	7.470	7.460	7.480	7.430
5	8.060	8.070	7.740	7.540	7.500	7.540	7.470	7.500	7.330
6	8.050	8.280	7.670	7.640	7.480	7.520	7.480	7.520	7.490
7	7.980	8.010	7.630	7.560	7.520	7.530	7.460	7.480	7.480
8	8.060	7.950	7.670	7.530	7.580	7.490	7.470	7.520	7.430
9	8.130	8.050	7.640	7.530	7.540	7.500	7.440	7.460	7.450
10	8.080	7.950	7.600	7.440	7.500	7.530	7.480	7.440	7.420
11	8.440	8.000	7.610	7.460	7.470	7.600	7.420	7.490	7.560
12	8.060	8.260	7.610	7.610	7.520	7.490	7.470	7.480	7.440
13	8.110	7.960	7.630	7.680	7.650	7.470	7.470	7.520	7.420
14	8.080	7.970	7.610	7.660	7.550	7.480	7.440	7.510	7.470
15	8.200	7.970	7.680	7.560	7.420	7.470	7.430	7.460	7.480
16	8.050	7.940	7.630	7.520	7.500	7.500	7.460	7.530	7.540
17	8.270	7.960	7.670	7.520	7.440	7.460	7.410	7.440	7.470
18	8.140	7.980	7.610	7.500	7.500	7.500	7.470	7.470	7.470
19	8.110	8.180	7.670	7.540	7.550	7.550	7.490	7.450	7.480
20	8.050	8.100	7.710	7.520	7.500	7.510	7.480	7.490	7.490
21	8.020	8.020	7.550	7.600	7.550	7.460	7.480	7.530	7.500
22	8.110	8.110	7.600	7.460	7.490	7.510	7.510	7.500	7.440
23	8.050	8.030	7.620	7.630	7.560	7.490	7.500	7.520	7.420
24	8.300	7.800	7.580	7.530	7.510	7.380	7.470	7.490	7.460
25	8.170	8.210	7.660	7.510	7.520	7.410	7.480	7.520	7.400

	10 VAR10
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	
21	
22	
23	
24	
25	

Quicksort : *algoritim porloqunosti dely 1000 000*
meriml cas
spacovanie program STATISTICA

Některé převodní vztahy pro tabulkové hodnoty

Normální rozdělení:

huslota: $g(u) = g(-u)$

distrib. fce: $\Phi(u) = 1 - \Phi(-u)$

kvantil: definice $\Phi(u_\alpha) = \alpha$ platí $u_\alpha = -u_{1-\alpha}$

důkaz: $\alpha = P(U < u_\alpha) = P(U > -u_\alpha)$ ke symetrii
 $= 1 - P(U < -u_\alpha)$

$\Rightarrow P(U < -u_\alpha) = 1 - \alpha \Rightarrow -u_\alpha = u_{1-\alpha}$

kritická hodnota: definice $P(U \geq u'_\alpha) = \alpha$

platí $u'_\alpha = -u'_{1-\alpha}$ (důkaz stejný)

platí $u'_\alpha = u_{1-\alpha}$ dle: $\alpha = P(U \geq u'_\alpha) = 1 - P(U < u'_\alpha)$
 $\Rightarrow P(U < u'_\alpha) = 1 - \alpha \Rightarrow u'_\alpha = u_{1-\alpha}$

χ^2 -rozdělení:

není symetrické

kvantil: $P(X < \chi^2_{m,\alpha}) = \alpha$

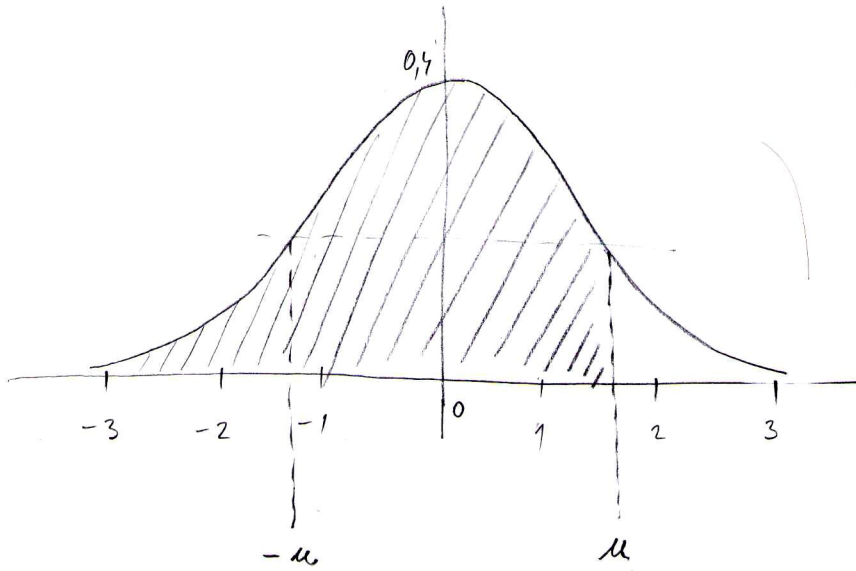
kritická hodnota: $P(X \geq \chi^2'_{m,\alpha}) = \alpha$

} definice

platí: $\chi^2_{m,\alpha} = \chi^2'_{m,1-\alpha}$

Ještě jednou převodní vztahy pro kvantily a kritické hodnoty $N(0,1)$ -
tentokrát pomocí obrázku:

hustota $g(u)$ rozdělení $N(0,1)$:



platí $g(u) = g(-u)$

distribuční fce $\Phi(u) = P(U \leq u)$ je vyjádřena část

polohy celá plocha pod křivkou je 1, platí ze symetrie $1 - \Phi(u) = \Phi(-u)$

kvantile u_α je hodnota, pro kterou $\Phi(u_\alpha) = \alpha$

apř ze symetrie $\Phi(-u_\alpha) = 1 - \Phi(u_\alpha) = 1 - \alpha$

tedy $-u_\alpha = u_{1-\alpha}$

kritická hodnota u'_α je hodnota, pro kterou $P(U > u'_\alpha) = \alpha$

$$\alpha = P(U > u'_\alpha) = 1 - P(U \leq u'_\alpha) = 1 - \Phi(u'_\alpha)$$

tedy $\Phi(u'_\alpha) = 1 - \alpha$ neboli $u'_\alpha = u_{1-\alpha}$

a podobně jako pro kvantily $-u'_\alpha = u'_{1-\alpha}$

t - rozdelení:

hustota: $f_n(t) = f_n(-t)$

distrib. fce: $F_n(t) = 1 - F_n(-t)$

kvantil: definice $P(X < t_{n,\alpha}) = \alpha$

platí $t_{n,\alpha} = -t_{n,1-\alpha}$

kritická hodnota: definice: $P(|X| \geq t'_{n,\alpha}) = \alpha$

platí: $t'_{n,\alpha} = t_{n,1-\alpha/2}$

F - rozdelení:

není symetrické

kvantil: def. $P(X < f_{m_1, m_2; \alpha}) = \alpha$

platí: $f_{m_1, m_2; \alpha} = \frac{1}{f_{m_2, m_1; 1-\alpha}}$

kritická hodnota: def. $P(X \geq f'_{m_1, m_2; \alpha}) = \alpha$

platí: $f'_{m_1, m_2; \alpha} = f_{m_1, m_2; 1-\alpha}$

$$f'_{m_1, m_2; \alpha} = \frac{1}{f'_{m_2, m_1; 1-\alpha}}$$

dh: necht $X_1 \sim \chi^2_{m_1}$, $X_2 \sim \chi^2_{m_2}$, nezávislé

$$P\left(\frac{\frac{X_1}{m_1}}{\frac{X_2}{m_2}} \geq f'_{m_1, m_2; \alpha}\right) = \alpha = P\left(\frac{\frac{X_2}{m_2}}{\frac{X_1}{m_1}} \geq f'_{m_2, m_1; \alpha}\right)$$

$$1 - \alpha = P\left(\frac{\frac{x_2}{n_2}}{\frac{x_1}{n_1}} < \frac{1}{f'_{n_1, n_2, \alpha}}\right) = 1 - P\left(\frac{\frac{x_2}{n_2}}{\frac{x_1}{n_1}} \geq \frac{1}{f'_{n_1, n_2, \alpha}}\right)$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{\frac{x_2}{n_2}}{\frac{x_1}{n_1}} \geq \frac{1}{f'_{n_1, n_2, \alpha}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f'_{n_2, n_1, \alpha}} = f'_{n_1, n_2, 1-\alpha}$$