Inverze v permutaci

další možnost výpočtu EM_n

Máme permutaci $\sigma = (a_1, \dots, a_n)$. **Inverze** je dvojice (a_i, a_j) taková, že $a_i > a_j$ a $i < j$ (větší prvek předchází menšímu).

Inverzní tabulka je pole $I_n = (i_1, \dots, i_n)$, kde i_j je počet prvků v permutaci, které předcházejí j a jsou větší než j.

Příklad: $\sigma = (7, 4, 5, 3, 2, 6, 1)$

Inverze: $(7,4), (7,5), (7,3), (7,2), (7,6), (7,1)$

$(4,3), (4,2), (4,1)$

$(5,3), (5,2), (5,1)$ celkem 16

$(3,2), (3,1)$

$(2,1)$

$(6,1)$

$I_n = (6, 4, 3, 1, 1, 1, 0)$

Mezi permutací a její inverzní tabulkou je vzájemně jednoznačný vztah.

Konstrukce permutace z inverzní tabulky:

7 nepředchází žádný větší prvek	7
6 předchází 1 větší	7 6
5 předchází 1 větší	7 5 6
4 předchází 1 větší	7 4 5 6

3 předchází 3 větší $\quad$ 7 4 5 3 6

2 předchází 4 větší $\quad$ 7 4 5 3 2 6

1 předchází 6 větších $\quad$ 7 4 5 3 2 6 1 $\quad$ výsledek

Pro prvky inverzní tabulky platí: $0 \le i_j \le n-j$.

Prvky inverzní tabulky jsou navzájem nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením, tj: $P(i_j = k) = \frac{1}{n-j+1}$ pro vš. $k = 0, \dots, n-j$

To není úplně zřejmé, dá se to dokázat např. pomocí vytvoř. fce

$$G_{i_1, i_2, \dots, i_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{n-1} \sum_{k_2=0}^{n-2} \dots \sum_{k_n=0}^{0} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} \, P(i_1 = k_1, i_2 = k_2, \dots, i_n = k_n)$$

je sdružená vytvořující fce veličin $i_1, i_2, \dots, i_n$

$P(i_1 = k_1, i_2 = k_2, \dots, i_n = k_n) = \frac{1}{n!}$ protože každé inverzní tabulce odpovídá právě jedna permutace

$$G_{i_1, i_2, \dots, i_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{k_1} \sum_{k_2} \dots \sum_{k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} =$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{k_1} x_1^{k_1} \sum_{k_2} x_2^{k_2} \dots \sum_{k_n} x_n^{k_n} =$$

$$= \left(\sum_{k_1=0}^{n-1} x_1^{k_1} \frac{1}{n} \right) \left(\sum_{k_2=0}^{n-2} x_2^{k_2} \frac{1}{n-1} \right) \dots \left(\sum_{k_n=0} x_n^{k_n} \cdot 1 \right) =$$

$$= G_{i_1}(x_1)\, G_{i_2}(x_2) \dots G_{i_n}(x_n)$$

součin vytvořujících fcí veličin $x_1, x_2, \dots, x_n$

to je ekvivalentní s tím, že veličiny jsou nezávislé

Nezávislost prvků je výhodou inverzní tabulky – v původní permutaci prvky nezávislé nejsou, protože musí být navzájem různé.

V inverzní tabulce je vždy na posledním místě 0, protože největšímu prvku nepředchází žádný větší.

Je-li $i_j = 0$, znamená to, že prvku j nepředchází nic většího, tj. j je průběžné maximum. Takže $M_n + 1$ je počet nul v inverzní tabulce.

Definujme $X_j = \begin{cases} 1 & \text{když } i_j = 0 \\ 0 & \text{když } i_j \neq 0 \end{cases}$

$$P(X_j = 1) = P(i_j = 0) = \frac{1}{n-j+1}$$

$$P(X_j = 0) = 1 - \frac{1}{n-j+1}$$

pak $M_n + 1 = \sum_{j=1}^{n} X_j$

$$E(M_n + 1) = \sum_{j=1}^{n} E X_j = \sum_{j=1}^{n} 1 \cdot P(X_j = 1) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n-j+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n$$

$$E M_n = H_n - 1$$

$$\operatorname{var}(M_n+1) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{var} X_j \quad \text{protože } X_j \text{ jsou nezávislé}$$

$$\operatorname{var} X_j = EX_j^2 - (EX_j)^2 = \frac{1}{n-j+1} - \left(\frac{1}{n-j+1}\right)^2$$

$$\operatorname{var}(M_n+1) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n-j+1} - \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{n-j+1}\right)^2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} = H_n - H_n^{(2)}$$

$\operatorname{var}(M_n+1) = \operatorname{var} M_n$ protože rozptyl je invariantní vůči posunutí

Další vlastnost: Součet prvků v inverzní tabulce je roven počtu inverzí v permutaci.

$$I_{n,\sigma} = \sum_{j=1}^{n} i_j$$

protože $0 \le i_j \le n-j$

je $0 \le I_{n,\sigma} \le \sum_{j=1}^{n} n-j = \sum_{j=0}^{n-1} j = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$

Jaký je očekávaný počet inverzí, tj. $E\,I_{n,\sigma}$?

Má to význam pro některé třídící algoritmy, např. Insert-sort.

Odvodíme rekurentní vztah:

mějme permutaci prvků $1, 2, \dots, n-1$ a přidejme do ní prvek n – může být vložen na n různých pozic, přičemž počet inverzí se může zvýšit o libovolnou hodnotu mezi 0 a $n-1$ se stejnou pravděpodobností

tedy

$$I_n = I_{n-1} + X_n ,$$

kde X_n je náhodná veličina s diskrétním rovnoměrným rozdělením, tj: $P(X_n = k) = \frac{1}{n}$ pro vš. $k = 0, 1, \dots, n-1$

dále:

$$I_n = X_n + I_{n-2} + X_{n-1} = \dots = \sum_{j=1}^{n} X_j$$

pro střední hodnoty:

$$EI_n = \sum_{j=1}^{n} EX_j$$

$$\mathrm{var}\, I_n = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{var}\, X_j ,$$ protože X_j jsou navzájem nezávislé

$$EX_j = \sum_{k=0}^{j-1} k \cdot \frac{1}{j} = \frac{1}{j} \sum_{k=0}^{j-1} k = \frac{1}{j} \cdot \frac{j(j-1)}{2} = \frac{j-1}{2}$$

takže

$$EI_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{j-1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}\binom{n}{2}$$

je tedy $O(n^2)$, ale s menší konstantou než v nejhorším případě

$$EX_j^2 = \sum_{k=0}^{j-1} k^2 \frac{1}{j} = \frac{1}{j} \sum_{k=1}^{j-1} k^2 = \frac{1}{j} \cdot \frac{(j-1)j(2j-1)}{6} = \frac{(j-1)(2j-1)}{6} =$$

$$= \frac{2j^2-3j+1}{6}$$

$$\operatorname{var} X_j = EX_j^2 - (EX_j)^2 = \frac{2j^2-3j+1}{6} - \frac{(j-1)^2}{4} = \frac{4j^2-6j+2-3j^2+6j-3}{12} =$$

$$= \frac{j^2-1}{12}$$

$$\operatorname{var} I_n = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{var} X_j = \frac{1}{12} \sum_{j=1}^{n} (j^2-1) = \frac{1}{12} \cdot \frac{(n+1)n(2n+1)}{6} - \frac{n}{12} =$$

$$= \frac{(n+1)n(2n+1)-6n}{72} = \frac{2n^3+2n^2+n^2+n-6n}{72} =$$

$$= \frac{2n^3+3n^2-5n}{72} = \frac{(n-1)n(2n+5)}{72}$$

rozptyl je hodně velký, řádově $O(n^3)$

Poznámka: Uvádí se, že ačkoliv výpočet momentů I_n je jednoduchý, neexistuje jednoduché explicitní vyjádření pravděpodobnosti $P(I_n = k)$.

Aplikace - algoritmus Insert-sort

Jiný způsob:

$$I_{n,\sigma} = \sum_{j=1}^{n} i_j$$

víme, že i_j jsou navzájem nezávislé náh. veličiny, $P(i_j = k) = \frac{1}{n-j+1}$

pro vš. $k = 0, \dots, n-j$

$$EI_{n,\sigma} = \sum_{j=1}^{n} Ei_j \quad , \quad \operatorname{var} I_{n,\sigma} = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{var} i_j$$

$$Ei_j = \sum_{k=0}^{n-j} k \cdot \frac{1}{n-j+1} = \frac{1}{n-j+1} \cdot \frac{(n-j+1)(n-j)}{2} = \frac{n-j}{2}$$

$$EI_{n,\sigma} = \sum_{j=1}^{n} \frac{n-j}{2} = n \cdot \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n^2}{2} - \frac{(n+1)n}{4} =$$

$$= \frac{2n^2 - n^2 - n}{4} = \frac{n(n-1)}{4} = \frac{1}{2}\binom{n}{2}$$

$$Ei_j^2 = \sum_{k=0}^{n-j} k^2 \cdot \frac{1}{n-j+1} = \frac{1}{n-j+1} \cdot \frac{(n-j+1)(n-j)(2n-2j+1)}{6} =$$

$$= \frac{(n-j)(2(n-j)+1)}{6} = \frac{2(n-j)^2 + (n-j)}{6}$$

$$\operatorname{var} i_j = Ei_j^2 - (Ei_j)^2 = \frac{2(n-j)^2 + n-j}{6} - \frac{(n-j)^2}{4} = \frac{4(n-j)^2 + 2(n-j) - 3(n-j)^2}{12} =$$

$$= \frac{(n-j)^2 + 2(n-j)}{12} = \frac{(n-j+1)^2 - 1}{12}$$

$$\operatorname{var} I_{n,\sigma} = \frac{1}{12} \sum_{j=1}^{n} \left((n-j+1)^2 - 1\right) = \frac{1}{12} \sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{n}{12} =$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \frac{(n+1)n(2n+1)}{6} - \frac{n}{12} = \frac{(n-1)n(2n+5)}{72}$$

Insert-sort

postup: permutace $(a_1, \dots, a_n)$ se prochází zleva doprava, každý prvek počínaje a_2 a konče a_n "dostrká" na svou správnou pozici

složitost: $T_n = \alpha + \beta n + \gamma I_n$

v nejhorším i v průměrném případě je $O(n^2)$

Algoritmus Shell-sort (Shell 1959, analýza Knuth)

v nejjednodušší verzi vypadá následovně:

permutace se rozdělí na dvě – na posloupnost s lichými a sudými indexy

každá zvlášť se setřídí Insert-sortem (ušetří se na tom, že má poloviční délku)

celá takto předtříděná permutace se setřídí opět Insert-sortem (ušetří se na tom, že je v ní méně inverzí)

na začátku máme 2 posloupnosti délky $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ a $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$

očekávaný počet inverzí v první je:

$$\frac{1}{2}\binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)}{2} = \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)}{4}$$

ve druhé:

$$\frac{1}{2}\binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{2} = \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)}{4}$$

Jednodušeji:
$$2 \cdot \frac{1}{2}\binom{\frac{n}{2}}{2} = \frac{\frac{n}{2}(\frac{n}{2} - 1)}{2} = \frac{\frac{n^2}{4} - \frac{n}{2}}{2} = \frac{n^2}{8} - \frac{n}{4} = O\left(\frac{n^2}{8}\right)$$

celkem:

$$\frac{1}{4}\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right)+\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\right)\right)=\frac{1}{4}\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor^2\cdot 2 \sim \frac{n^2}{8}$$

tedy 1. fáze má očekávanou složitost $\frac{n^2}{8}$

Jaký je očekávaný počet inverzí v předtříděné permutaci ?

zřejmě inverze mohou být pouze mezi lichými a sudými členy

pokud známe umístění prvků na lichých místech, máme permutaci jednoznačně určenou

Každou předtříděnou permutaci ztotožníme s cestou na celočíselné mřížce z bodu $(0,0)$ do bodu $\left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil, \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)$, kde k-tý krok je nahoru, když k je na sudém místě,

—"— doprava —"— lichém —"—

inverze přiřadíme lichým místům

Příklad: po první fázi máme předtříděnou permutaci

$(1, 3, 2, 6, 4, 8, 5, 9, 7, 11, 10)$

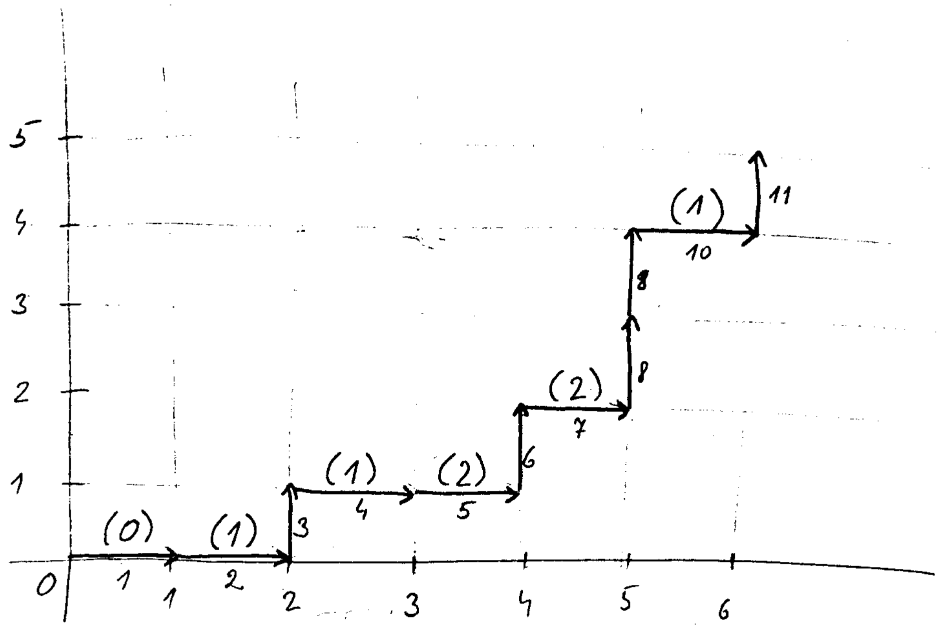
$n = 11$, $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor = 5$, $\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil = 6$

lichá místa: 1, 2, 4, 5, 7, 10

sudá místa: 3, 6, 8, 9, 11

inverze: (3,2) (6,4) (6,5) (8,5) (8,7) (9,7) (11,10)

celkem 7



čísla v závorkách jsou počty inverzí pro každý lichý prvek

z bodu (i,j) do $(i+1,j)$ je přesně $|i-j|$ inverzí

protože: odpovídající číslo je $i+j+1$ a je na pozici $2i+1$

rozdíl hodnoty čísla a jeho pozice je tedy $|i-j|$

je-li $j>i$, je hodnota čísla větší než jeho pozice,

a tedy $j-i$ menších čísel stojí za ním

je-li $i>j$, je hodnota čísla menší než jeho pozice,

a tedy $i-j$ větších čísel stojí před ním

počet všech možných cest z $(0,0)$ do $\left(\lceil \frac{n}{2} \rceil, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right)$ je $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

počet cest procházejících segmentem (i,j), $(i+1,j)$ je

počet cest z $(0,0)$ do (i,j) $\times$ počet cest z $(i+1,j)$ do $\left(\lceil \frac{n}{2} \rceil, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right) =$

$$= \binom{i+j}{i}\binom{n-i-j-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - j}$$

protože počet cest z (k,l) do $(u,v) = \binom{u-k+v-l}{u-k}$

Celkový počet inverzí ve všech možných permutacích je tedy

$$A_n = \sum_{i=0}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} |i-j| \binom{i+j}{i} \binom{n-i-j-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - j}$$

a očekávaný počet inverzí je $\dfrac{A_n}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}$

výpočet A_n : počítá se zvlášť pro sudá a lichá n

odstraní se absolutní hodnota

$$A_{2m} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{i} (i-j) \binom{i+j}{i} \binom{2m-i-j-1}{m-j} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=i}^{m} (j-i) \binom{i+j}{i} \binom{2m-i-j-1}{m-j} =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{i} (i-j) \binom{i+j}{i} \left[\binom{2m-i-j-1}{m-j} + \binom{2m-i-j-1}{m-j-1} \right]$$

(ve 2. druhém součtu se prohodilo pořadí sčítání $- \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{j}$, pak se přeznačily indexy: $i \to j$, $j \to i$)

$$= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{i} (i-j) \binom{i+j}{i} \binom{2m-i-j}{m-j} = m\, 4^{m-1}$$

(s použitím komplikovaných identit)

analogicky se provede výpočet pro liché n – vyjde

$$A_{2m+1} = 2m\, 4^{m-1}$$

a tedy $A_n = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor 2^{n-2}$ pro všechna n

Návod k výpočtu A_{2m}:

1) použít vytvořující fci $A(z) = \sum_{m\geq 0} A_{2m} z^m$

dosadit A_{2m} a výraz upravit použitím "známé" identity

$$\sum_{k\geq 0} \binom{r-tk}{k} z^k = \frac{X^{r+1}(z)}{(t+1)X(z)-t}$$

kde $X(z)$ je řešení rovnice

$$z = X^{t+1}(z) - X^t(z)$$

$$A(z) = \sum_{i\geq 0} \sum_{j=0}^{i} (i-j)\binom{i+j}{i} z^i \underbrace{\sum_{m-i\geq 0} \binom{2m-i-j}{m-i} z^{m-i}}_{\text{na tohle se použije ta identita}}$$

(po dosazení a drobné úpravě)

$$= \frac{1}{s}\left(\frac{1-s}{2z}\right)^{i-j}, \text{ kde } s = \sqrt{1-4z}$$

substitucí indexů $k = i-j$ se $A(z)$ dá mechanickými úpravami převést na

$$A(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{k}{s^2}\left(\frac{(1-s)^2}{4z}\right)^k$$

je to řada tvaru $\sum_k k\cdot(\text{něco})^k$ – tu umíme sečíst derivováním

vyjde $A(z) = \frac{z}{s^4} = \frac{z}{(1-4z)^2} = \frac{1}{4}\sum_{m\geq 0} m(4z)^m$

z toho $A_{2m} = m\,4^{m-1}$

2) Platí: když $f(i,j)$ je funkce "konstantní podél diagonál", tj. když

$$f(i, i-j) = f(j,0) \text{ a } f(i, i+j) = f(0,j), \text{ pak}$$

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m} f(i,j)\binom{i+j}{i}\binom{2m-i-j-1}{m-j} = \sum_{k\geq 1} \binom{2m}{m-k} \sum_{j=0}^{k-1} \left(f(j,0) + f(0,j+1)\right)$$

v našem případě bychom aplikací této identity měli dostat

$$A_{2m} = \sum_{k\geq 1} \binom{2m}{m-k} k^2$$

a dosazením $k^2 = m^2 - (m-k)(m+k)$ by měl vyjít požadovaný výsledek očekávaný počet inverzí je $\dfrac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor 2^{n-2}}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \approx 0{,}157\, n^{3/2}$

s použitím Stirlingovy formule:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$$

nebo $\binom{n}{k} \approx \sqrt{\dfrac{n}{2\pi k (n-k)}} \left(\dfrac{n}{k}\right)^k \left(\dfrac{n}{n-k}\right)^{n-k}$

pro n sudé:

$$\frac{\frac{n}{2} 2^{n-2}}{\sqrt{\frac{n}{2\pi \frac{n}{2}(n-\frac{n}{2})}} \left(\frac{n}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{n}{n-\frac{n}{2}}\right)^{n-\frac{n}{2}}} =$$

$$= \frac{\frac{n}{2} 2^{n-2}}{\sqrt{\frac{1}{\pi \frac{n}{2}}}\; 2^{\frac{n}{2}}\, 2^{\frac{n}{2}}} = \frac{\frac{n}{2} 2^{-2}}{\sqrt{\frac{2}{\pi n}}} = \sqrt{\frac{\frac{n^2}{64}}{\frac{2}{\pi n}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi n^3}{128}} = \sqrt{\frac{\pi}{128}}\, n^{3/2}$$

Ve druhé fázi se na počtu inverzí znatelně ušetří.

vylepšení: v první fázi rozdělit posloupnost na řadu kratších posloupností

zvolíme nějakou konstantu k

vytvoříme posloupnosti: $a_1, a_{1+k}, a_{1+2k}, \dots$

$a_2, a_{2+k}, a_{2+2k}, \dots$

$\vdots$

$a_k, a_{2k}, a_{3k}, \dots$

každá z těchto posloupností má délku přibližně $\frac{n}{k}$

očekávaný počet inverzí v každé posloupnosti je $\frac{1}{2}\binom{\frac{n}{k}}{2} =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{n}{k}\left(\frac{n}{k}-1\right)}{2} \doteq \frac{1}{4}\left(\frac{n}{k}\right)^2$$

celkem tedy $k \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{n}{k}\right)^2 = \frac{n^2}{4k}$

ve 2. fázi třídíme Insert-sortem celou posloupnost

inverze mohou být pouze mezi členy různých posloupností

musíme vzít v úvahu všechny možné dvojice posloupností - je jich $\binom{k}{2}$

$$\text{očekávaný počet inverzí} = \binom{k}{2} \cdot \frac{A_{2\cdot\frac{n}{k}}}{\binom{\frac{2n}{k}}{\frac{n}{k}}}$$

kde $A_{2\cdot\frac{n}{k}}$ je počet inverzí v posloupnosti délky $2\cdot\frac{n}{k}$ složené ze dvou setříděných posloupností poloviční délky podle předchozího $A_{2\cdot\frac{n}{k}} = \frac{n}{k} \cdot 2^{\frac{2n}{k}-2}$

kombinační čísla $\binom{2\cdot\frac{n}{k}}{\frac{n}{k}}$ zvoríme podle Stirlingovy formule:

$$\binom{n}{k} \approx \sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}} \left(\frac{n}{k}\right)^k \left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k}$$

$$\binom{\frac{2n}{k}}{\frac{n}{k}} = \sqrt{\frac{\frac{2n}{k}}{2\pi\frac{n}{k}\left(\frac{2n}{k}-\frac{n}{k}\right)}} \left(\frac{\frac{2n}{k}}{\frac{n}{k}}\right)^{\frac{n}{k}} \left(\frac{\frac{2n}{k}}{\frac{2n}{k}-\frac{n}{k}}\right)^{\frac{2n}{k}-\frac{n}{k}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\pi\frac{n}{k}}}\, 2^{\frac{2n}{k}} = \sqrt{\frac{k}{\pi n}}\, 2^{\frac{2n}{k}}$$

očekávaný počet inverzí ve 2. fázi:

$$\binom{k}{2} \frac{\frac{n}{k}\, 2^{\frac{2n}{k}-2}}{\sqrt{\frac{k}{\pi n}}\, 2^{\frac{2n}{k}}} = \frac{k(k-1)}{2} \sqrt{\pi} \left(\frac{n}{k}\right)^{3/2} \cdot \frac{1}{4} \doteq$$

$$\doteq \frac{\sqrt{\pi}}{8}\, n^{3/2} k^{1/2}$$

očekávaný počet inverzí celkem:

$$\frac{n^2}{4k} + \frac{\sqrt{\pi}}{8} n^{3/2} k^{1/2} = f(n,k)$$

Pro jaké k nabývá fce $f(n,k)$ minima?

$$f'(n,k) = \frac{n^2}{4}\cdot\frac{-1}{k^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{8} n^{3/2} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{k^{1/2}} = 0 \qquad / \cdot 16k^2$$

$$-4n^2 + \sqrt{\pi}\, n^{3/2} k^{3/2} = 0$$

$$k^{3/2} = \frac{4n^2}{\sqrt{\pi}\, n^{3/2}} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} n^{1/2}$$

$$k^3 = \frac{16}{\pi} n$$

$$k = \left(\frac{16}{\pi} n\right)^{1/3}$$

pro toto k je hodnota $f(n,k)$:

$$f\left(n, \left(\frac{16}{\pi}n\right)^{1/3}\right) = \frac{n^2}{4\left(\frac{16}{\pi}n\right)^{1/3}} + \frac{\sqrt{\pi}}{8} n^{3/2} \left(\frac{16}{\pi}n\right)^{1/6} =$$

$$= konst \left(n^{2-1/3} + n^{3/2+1/6}\right) = konst \cdot n^{5/3}$$

Závěr: Pro 2-stupňový Shell-sort je optimální volba kroku $k = \left(\frac{16}{\pi}n\right)^{1/3}$ a očekávaná složitost celého algoritmu je potom $O(n^{5/3})$.

zlepšení: vícestupňový Shell-sort, kde se v 1. fázi třídí velmi krátké posloupnosti (nejlépe dvouprvkové) a v dalších fázích se postupně spojují do posloupností dvojnásobných délek

Příklad: třídíme 16-prvkovou posloupnost

3 5 12 14 16 1 7 8 2 9 6 11 10 15 4 13

1. fáze – třídíme 8 2-prvkových posloupností tvaru a_k, a_{k+8}

dostaneme:

2 5 6 11 10 1 4 8 3 9 12 14 16 15 7 13

2. fáze – třídíme 4 4-prvkové posloupnosti tvaru $a_k, a_{k+4}, a_{k+8}, a_{k+12}$

dostaneme:

2 1 4 8 3 5 6 11 10 9 7 13 16 15 12 14

3. fáze – 2 8-prvkové posloupnosti – sudé a liché členy

2 1 3 5 4 8 6 9 7 11 10 13 12 14 16 15

4. fáze – třídíme celou posloupnost

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

celkem 4 fáze, přírůstky 8, 4, 2, 1 (vzdálenosti)

~~v nejhorším případě~~

Složitost: v nejhorším případě

dolní odhad je $\Omega(n^2)$

horní odhad je $O(n^2)$ } celkově $\Theta(n^2)$

horní odhad: v k-té fázi se třídí h_k posloupností, každá o $\frac{n}{h_k}$ prvcích (± 1, pokud $\frac{n}{h_k}$ není celé)

čas na jednu posloupnost je $O\left(\left(\frac{n}{h_k}\right)^2\right)$

celkem na jednu fázi $h_k\left(\frac{n}{h_k}\right)^2 = \frac{n^2}{h_k}$ (řádově)

celkem přes všechny fáze $\sum_{k=1}^{t} \frac{n^2}{h_k} = n^2 \sum_{k=1}^{t} \frac{1}{h_k} =$

$$= n^2 \sum_{k=0}^{t-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = n^2 \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^t}{1-\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq 2n^2 = O(n^2)$$

dolní odhad: vezmeme vstupní permutaci, kde $\frac{n}{2}$ největších čísel je na sudých pozicích, $\frac{n}{2}$ nejmenších na lichých pozicích, předpokládáme, že n je mocnina dvojky

před závěrečnou fází je $\frac{n}{2}$ největších prvků setříděno a jsou stále na sudých pozicích

$\frac{n}{2}$ nejmenších je setříděno a jsou na lichých pozicích.

(třeba 1, 9, 2, 10, 3, 11, 4, 12, …)

i-tý nejmenší prvek pro $i \leq \frac{n}{2}$ je na pozici $2i-1$, aby se dostal na své místo, je třeba $i-1$ posunů (výměn)

čas na zatřídění lichých prvků je $\sum_{i=1}^{n/2} (i-1) =$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)\cdot\frac{n}{2} - \frac{n}{2} = \Omega(n^2)$$

Vícestupňový Shellsort s Shellovými přírůstky $1, 2, 4, \dots, 2^t$

očekávaná složitost

poslední fáze ... $n^{3/2}$

předposlední ... $2\cdot\left(\frac{n}{2}\right)^{3/2}$

předpředposlední ... $4\cdot\left(\frac{n}{4}\right)^{3/2}$

$\vdots$

druhá .... $2^{t-1}\left(\frac{n}{2^{t-1}}\right)^{3/2}$

první ..... $\frac{n}{2}$ ... odpovídá přírůstku 2^t

z toho $2^t = \frac{n}{2}$, $t = \log\frac{n}{2} = \log n - \log 2 = \log n - 1$, $t-1 = \log n - 2$

celkem:

$$n^{3/2} + 2\cdot\left(\frac{n}{2}\right)^{3/2} + \dots + 2^{t-1}\left(\frac{n}{2^{t-1}}\right)^{3/2} + \frac{n}{2} =$$

$$= n^{3/2}\left(1 + 2^{-1/2} + \dots + 2^{k(1-\frac{1}{2})} + \dots + 2^{(t-1)(1-\frac{1}{2})}\right) + \frac{n}{2} =$$

$$= n^{3/2}\sum_{k=0}^{t-1} 2^{-k/2} + \frac{n}{2} = n^{3/2}\sum_{k=0}^{\log n-2}\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^k + \frac{n}{2} =$$

$$= n^{3/2}\,\frac{\left(2^{-1/2}\right)^{\log n-2} - 1}{2^{-1/2} - 1} + \frac{n}{2} = n^{3/2}\,\frac{2^{-\frac{1}{2}\lg n + 1} - 1}{2^{-1/2} - 1} + \frac{n}{2} =$$

$$= n^{3/2}\,\frac{2^{\log n^{-1/2}}\cdot 2 - 1}{2^{-1/2} - 1} + \frac{n}{2} = n^{3/2}\,\frac{1 + 2n^{-1/2}}{1 + 2^{-1/2}} + \frac{n}{2} =$$

$$= n^{3/2}\,\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{2n}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{n}{2} = O\left(n^{3/2}\right)$$

obecně: t fází

v každé se třídí h_s posloupností $(s = t, t-1, \dots, 1)$

i-tá posloupnost je tvořena členy s indexy $i + j h_s$

v našem prvním příkladě bylo $h_2 = 2,\ h_1 = 1$

ve druhém $h_4 = 8,\ h_3 = 4,\ h_2 = 2,\ h_1 = 1$

čas je ve všech případech nejméně $n^{3/2}$, protože poslední fáze je vždycky stejná a nedá se udělat rychleji

Ale posloupnosti lze volit rafinovaněji:

Knuthova varianta: $h_1 = 1,\ h_{s+1} = 3h_s + 1$

čas: $O(n^{1{,}25})$ nebo $O(n \log^2 n)$

Hibbardova varianta: $h_s = 2^s - 1$

maximální čas: $O(n^{3/2})$

průměrný čas: $O(n^{1{,}26})$

a další (některé výsledky byly odvozeny experimentálně)

Sedgewick: $h_s = c_1 4^s + c_2 2^s + c_3$

nejhorší čas: $O(n^{4/3})$

průměrný čas: $O(n^{7/6})$

2.3 Různé verze Shell sortu

Jako sekvence velikostí skoku může být využita libovolná klesající posloupnost přirozených čísel, jejíž poslední prvek je roven 1 (čímž je zajištěno, že v poslední fázi algoritmu se třídí celá posloupnost čísel najednou).

Ve své diplomové práci jsem se zaměřila na porovnání většiny verzí, které jsem nalezla v použité literatuře nebo které jsem navrhla.

Vzhledem k tomu, že Shellova varianta se v literatuře vyskytovala ve dvou podobách (jako stejnoměrná i jako nestejnoměrná verze), zahrnula jsem ji do experimentů dvakrát. V prvním případě pod názvem Shell, v druhém pod názvem 1/2 Shell.

Tabulka 1 - Výčet všech verzí

Název verze	Sekvence velikostí skoku	Literatura
Shell	$h_i=2^i$	[SED]
Papernov-Stasevich	$h_i=2^i+1$	[SED] [KN]
Hibbard	$h_i=2^i-1$	[KN] [WE1] [WE2] [SED]
Knuth	$h_i=\lfloor(3^i-1)/2\rfloor$	[KN] [WE1] [SED]
PR	$h_i=\lfloor(2^i-(-1)^i)/3\rfloor$	[KN]
Sedgewick 1	$h_i=4^{i+1}+3\cdot 2^i+1$	[SED]
Sedgewick 2	$h_i=2\cdot 4^i-9\cdot 2^i+9$	[SED]
Sedgewick SM	$h_i=9\cdot 4^i-9\cdot 2^i+1 \cup 4^i-3\cdot 2^i+1$	[WE1] [WE2]
Pratt	$h_{ij}=2^i\cdot 3^j$	[KN] [PR]
F	$h_i=h_{i-1}+h_{i-2}$	[KN]
1/2 Shell	$h_i=\lfloor 1/2\ h_{i+1}\rfloor$ $h_t=\lfloor N/2\rfloor$, $h_1=1$	[KN] [WE1] [WE2]
2/3	$h_i=\lfloor 2/3\ h_{i+1}\rfloor$ $h_t=\lfloor N/2\rfloor$, $h_1=1$	
3/4	$h_i=\lfloor 2/3\ h_{i+1}\rfloor$ $h_t=\lfloor N/2\rfloor$, $h_1=1$	[IN] [DOB]
4/5	$h_i=\lfloor 4/5\ h_{i+1}\rfloor$ $h_t=\lfloor N/2\rfloor$, $h_1=1$	
5/6	$h_i=\lfloor 5/6\ h_{i+1}\rfloor$ $h_t=\lfloor N/2\rfloor$, $h_1=1$	
6/7	$h_i=\lfloor 6/7\ h_{i+1}\rfloor$ $h_t=\lfloor N/2\rfloor$, $h_1=1$	
7/8	$h_i=\lfloor 7/8\ h_{i+1}\rfloor$ $h_t=\lfloor N/2\rfloor$, $h_1=1$	
8/9	$h_i=\lfloor 8/9\ h_{i+1}\rfloor$ $h_t=\lfloor N/2\rfloor$, $h_1=1$	
9/10	$h_i=\lfloor 9/10\ h_{i+1}\rfloor$ $h_t=\lfloor N/2\rfloor$, $h_1=1$	
3/5	$h_i=\lfloor 3/5\ h_{i+1}\rfloor$ $h_t=\lfloor N/2\rfloor$, $h_1=1$	
5/7	$h_i=\lfloor 5/7\ h_{i+1}\rfloor$ $h_t=\lfloor N/2\rfloor$, $h_1=1$	

Pozn. Prattova verze není v této práci dále vyšetřována.

2.4 *Výpočetní složitosti jednotlivých verzí*

V tomto odstavci uvádím přehled dokázaných složitostí.

Tabulka 2 - Tabulka výpočetních složitostí dokázaných teoreticky

Název verze	Nejhorší případ	Průměrný případ	Literatura
Shell	$\theta(N^2)$	$\theta(N^{3/2})$	[KN str. 90] [WE2 str. 218]
Hibbard	$O(N^{3/2})$ $\Omega(N^{3/2})$		[KN str. 91] [SED str. 162]
Sedgewick 1	$O(N^{4/3})$		[SED str. 165]
Sedgewick 2	$O(N^{4/3})$		[SED str. 168]
Pratt	$O(N \cdot log^2 N)$	$O(N \cdot log^2 N)$	[PR str. 32]

Tabulka 3 - Tabulka výpočetních složitostí zjištěných experimentálně

Název verze	Průměrný případ	Literatura
Papernov-Stasevich	$1.09N^{1.27}$ *či* $0.30N \cdot ln^2 N - 1.35N \cdot lnN$	[KN str. 93]
Hibbard	$1.22N^{1.26}$ *či* $0.29N \cdot ln^2 N - 1.26N \cdot lnN$ $\theta(N^{5/4})$	[KN str. 93] [WE1]
PR	$1.12N^{1.28}$ *či* $0.36N \cdot ln^2 N - 1.73N \cdot lnN$	[KN str. 93]
Knuth	$1.66N^{1.25}$ *či* $0.33N \cdot ln^2 N - 1.26N \cdot lnN$ $\theta(N^{5/4})$	[KN str. 93] [WE1]
Sedgewick SM	$\theta(N^{7/6})$	[WE1]

Pozn. Na straně 93 v [KN] jsou uvedeny tyto výsledky s odkazem na experimenty Jamese PETERSONA a Davida L. RUSSELLA na Stanfordské universitě v roce 1971.

Očekávaná složitost Shellsortu:

Teoretických výsledků je žalostně málo.

Knuth (1973) analyzoval dvoufázový Shellsort. Pro přírůstky 1, 2 je celková očekávaná složitost $O(n^2)$, přičemž složitost 2. fáze je $O(n^{3/2})$. Zřejmě složitost 2-fáze je dolní hranicí pro vícestupňový Shellsort s přírůstky $1, 2, .., 2^i, ..$ (vždycky se končí Insertsortem 2-setříděné posloupnosti).

Pro obecné přírůstky 1, h dostal očekávanou složitost

$$\underbrace{\frac{n^2}{4h}}_{1.\ \text{fáze}} + \underbrace{\frac{1}{8}\sqrt{\pi n^3 h} + O(n)}_{2.\ \text{fáze}}$$

Z toho optimální volba $h = \left(\frac{16}{\pi} n\right)^{1/3}$

a z toho optimální očekávaný čas je $O(n^{5/3})$

Knuth a Janson (1997) spočítali očekávaný čas pro 3-fázový Shellsort s přírůstky 1, g, h. Optimální volba přírůstků je $h = \Theta(n^{7/15})$, $g = \Theta(h^{1/5})$, výsledný očekávaný čas je $O(n^{23/15})$.

Problém je v určení očekávaného počtu inverzí v předtříděné permutaci, která už není náhodná.

Ještě jeden obecný výsledek:

Jiang, Li, Vitányi (1999): očekávaná složitost p-stupňového Shellsortu pro libovolnou přírůstkovou sekvenci je $\Omega(p n^{1+\frac{1}{p}})$ pro všechna $p \le \log n$.

Speciálně:

$p = 1$: $\Omega(n^2)$ což je očekávaná složitost Insertionsortu

$p = 2$: $\Omega(n^{3/2})$ .. Knuth má $O(n^{5/3})$

$p = 3$: $\Omega(n^{4/3})$ .. Knuth a Janson: $O(n^{23/15})$

$p = \log n$: $\Omega(n \log n)$ což je dolní odhad pro každý třídicí algoritmus

Dále: Přírůstková sekvence, pro kterou by Shellsort mohl mít oč. složitost $O(n \log n)$, by musela mít délku $O(\log n)$. Ale neví se, jestli taková existuje.

Většinou máme místo teoretické analýzy očekávaného případu pouze experimentální výsledky, které ale také leccos napovídají.

Weiss (1991):

pro varianty Hibbard, Knuth dostal experimentální $\Theta(n^{5/4})$

-‖- Sedgewick -‖- $\Theta(n^{7/6})$

Usuzuje, že pro přírůstkové sekvence délky $\Theta(\log n)$ platí vztah: nejhorší případ $\Theta(n^k)$ implikuje průměrný případ $\Theta(n^{(k+1)/2})$