Přičítání jedničky k binárnímu číslu (Hofri)

Máme číslo $a = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i$, kde $a_i = 0$ nebo $a_i = 1$ pro všechna i.

Máme vypočítat číslo $b = \sum_{i=0}^{n} b_i 2^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i + 1$.

Algoritmus realizujeme na Turingově stroji s jednou páskou a jednou hlavou.

Počáteční stav:

hlava

*	a_{n-1}	a_{n-2}	....	a_1	a_0	*

Konečný stav:

b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	....	b_1	b_0	*

hlava

Výpočet: hlava se pohybuje po pásce zprava doleva, v každém kroku o jedno políčko

přitom 1 přepisuje na 0 a jede dál, dokud nenarazí na první 0 nebo konec zápisu (*) – přepíše ji na 1 a vrací se do výchozí pozice

cestou zpátky nic nepřepisuje

Doba výpočtu = počet kroků stroje

nejpříznivější případ: číslo a je sudé, tj. $a_0 = 0$

doba výpočtu $T_n = 2$ nezávisle na velikosti čísla

nejhorší případ: číslo a je tvaru 1 1 1

doba výpočtu $T_n = 2(n+1)$

očekávaná doba výpočtu: závisí na rozdělení vstupních dat

předpokládáme, že $P(a_i = 0) = P(a_i = 1)$ pro všechna i

hledáme rozdělení doby výpočtu, tj. $P(T_n = k)$ pro $k = 2, \dots, 2(n+1)$

zřejmě $P(T_n = k) = 0$ pro k liché

$$P(T_n = 2m) = \frac{\text{počet příznivých případů}}{\text{počet možných případů}}$$

možné případy: počet všech posloupností délky n složených z 0 a 1

je jich 2^n

příznivé případy: posloupnosti tvaru $\underbrace{\dots\dots}_{n-m}^{\text{cokoliv}} 0 \underbrace{1\,1 \dots 1}_{m-1}$

je jich 2^{n-m}

$$P(T_n = 2m) = \frac{2^{n-m}}{2^n} = 2^{-m} \quad \text{pro } 1 \le m \le n$$

$$= \frac{1}{2^n} \quad \text{pro } m = n+1$$

Očekávaná doba výpočtu: $ET_n = \sum_{k=2}^{2(n+1)} k\, P(T_n = k)$

$$ET_n = \sum_{m=1}^{n+1} 2m\, P(T_n = 2m) = \sum_{m=1}^{n} 2m\, 2^{-m} + 2(n+1)2^{-n}$$

vypočteme součet $\sum_{m=1}^{n} m q^m$, pak dosadíme $q = \frac{1}{2}$:

$$\sum_{m=1}^{n} m q^m = q \sum_{m=1}^{n} m q^{m-1} = q \sum_{m=1}^{n} (q^m)' = q \left(\sum_{m=1}^{n} q^m\right)' =$$

$$= q \left(q \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}\right)' = q \left(\frac{q^{n+1} - q}{q-1}\right)' =$$

$$= q \cdot \frac{((n+1)q^n - 1)(q-1) - (q^{n+1} - q)}{(q-1)^2} =$$

$$= \frac{q}{(q-1)^2} \left(n q^{n+1} + q^{n+1} - q - n q^n - q^n + 1 - q^{n+1} + q\right) =$$

$$= \frac{q}{(q-1)^2} \left(1 + n q^{n+1} - (n+1) q^n\right)$$

$$ET_n = 2 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} \left(1 + \frac{n}{2^{n+1}} - \frac{n+1}{2^n}\right) + \frac{2(n+1)}{2^n} =$$

$$= 4 + \frac{4n}{2^{n+1}} - \frac{4(n+1)}{2^n} + \frac{2(n+1)}{2^n} = 4 + \frac{n - (n+1)}{2^{n-1}} = \underline{\underline{4 - \frac{1}{2^{n-1}}}}$$

Pokud nás zajímá jenom ET_n pro $n \to \infty$, mohli jsme výsledek dostat jednodušeji:

$$\sum_{m=1}^{\infty} m q^m = q\left(\sum_{m=1}^{\infty} q^m\right)' = q\left(\frac{q}{1-q}\right)' = q\,\frac{1-q+q}{(1-q)^2} =$$

$$= \frac{q}{(1-q)^2}$$

ovšem jenom za předpokladu, že $|q| < 1$, což $q = \frac{1}{2}$ je

pro $q = \frac{1}{2}$ máme:

$$ET_\infty = 2 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4$$

Pro konečná n je $ET_n \leq ET_\infty = 4$.

pro $n \to \infty$ je $\underline{\underline{\overline{T}_n \approx 4}}$

očekávaná doba výpočtu je tedy konstantní

Jiný způsob výpočtu střední hodnoty: pomocí vytvořující fce

vytvořující fce $G_x(x) = \sum_{k=2}^{2(n+1)} x^k P(T_n = k) = \sum_{m=1}^{n+1} x^{2m} P(T_n = 2m) =$

$$= \sum_{m=1}^{n} x^{2m} 2^{-m} + x^{2(n+1)} 2^{-n} = \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{x^2}{2}\right)^m + \frac{x^{2(n+1)}}{2^n} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^n - 1}{\frac{x^2}{2} - 1} + 2\left(\frac{x^2}{2}\right)^{n+1}$$

platí: $E T_n = G'(1)$

$$G'(1) = \left[x \cdot \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^n - 1}{\frac{x^2}{2} - 1} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{n\left(\frac{x^2}{2}\right)^{n-1} x \left(\frac{x^2}{2} - 1\right) - \left(\left(\frac{x^2}{2}\right)^n - 1\right) x}{\left(\frac{x^2}{2} - 1\right)^2} + \right.$$

$$\left. 2(n+1)\left(\frac{x^2}{2}\right)^n x \right]_1 =$$

$$= -2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) + 2\left(-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1\right) + 2(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n =$$

$$= 4 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(-1 - n - 1 + n + 1\right) = \underline{\underline{4 - \frac{1}{2^{n-1}}}}$$

Výpočet momentů náhodné veličiny z vytvořující fce:

náh. vel. X nabývá hodnot $1, 2, \dots, k, \dots$ s pstmi $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$

Stř. hodnota: $EX = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k$

rozptyl: $\operatorname{var} X = E(X-EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$

$$EX^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p_k$$

vytvořující fce: $G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k p_k$ (jistě konverguje alespoň pro $|x| \le 1$)

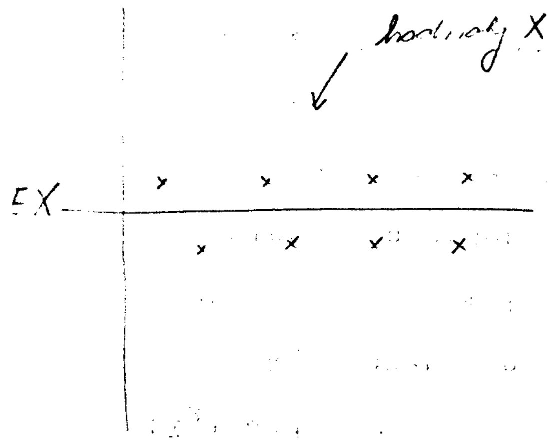
$$G'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} p_k \qquad G'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = EX$$

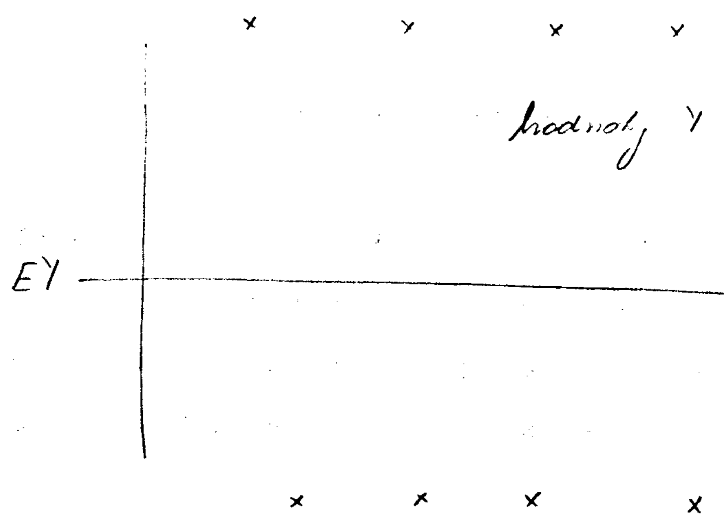
$$G''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) x^{k-2} p_k \qquad G''(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) p_k = EX(X-1) =$$

$$= EX^2 - EX$$

$$\operatorname{var} X = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2$$

Střední hodnota nedává úplnou představu o chování náhodné veličiny.





Veličiny X a Y mají stejnou střední hodnotu, ale liší se rozptylem: $\operatorname{var} X = E(X - EX)^2$

Rozptyl doby výpočtu:

$$\operatorname{var} T_n = E(T_n - ET_n)^2 = ET_n^2 - (ET_n)^2$$

$$ET_n^2 = \sum_{m=1}^{n+1} (2m)^2 P(T_n = 2m) = \sum_{m=1}^{n} (2m)^2 2^{-m} + 4(n+1)^2 2^{-n}$$

nebo pomocí vytvořující fce:

$$G''(x) = \left(\sum_{m=1}^{n+1} x^{2m} P(T_n = 2m)\right)'' = \left(\sum_{m=1}^{n+1} 2m\, x^{2m-1} P(T_n = 2m)\right)' =$$

$$= \sum_{m=1}^{n+1} 2m(2m-1)\, x^{2m-2} P(T_n = 2m)$$

$$G''(1) = \sum_{m=1}^{n+1} 2m(2m-1) P(T_n = 2m) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n+1} (2m)^2 P(T_n = 2m) - \sum_{m=1}^{n+1} 2m\, P(T_n = 2m) =$$

$$= ET_n^2 - ET_n$$

tedy $\operatorname{var} T_n = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2 = 8 - \frac{2n+1}{2^{n-2}} - \frac{1}{4^{n-1}}$

výpočet je tak v každém případě komplikovaný

pro $n \to \infty$ vychází $ET_n^2 \approx 24$

$$\underline{\underline{\operatorname{var} T_n \approx 8}}$$

Výsledky pro velká n jsme mohli získat jednodušší aproximací geometrickým rozdělením s parametrem $p = \frac{1}{2}$:

Čekáme na první výskyt 0 v posloupnosti prvků 0 a 1, kde 0 a 1 se vyskytují nezávisle, $P(0) = p$, $P(1) = 1-p$.
Nechť T_n^* je počet kroků "tam", tj. na první 0

$P(T_n^* = m) = P(\text{první výskyt 0 je na } m\text{-tém místě zprava}) =$

$$= (1-p)^{m-1} p = \left(\frac{1}{2}\right)^m \quad \text{pro } p = \frac{1}{2}$$

pro geometrické rozdělení $ET_n^* = \frac{1}{p} = 2$

$$\operatorname{var} T_n^* = \frac{1-p}{p^2} = 2$$

doba výpočtu $T_n = 2 T_n^*$

tedy $ET_n = 2 \cdot ET_n^* = 4$, $\operatorname{var} T_n = 4 \operatorname{var} T_n^* = 8$

(Rényi)

S jakou pstí můžeme očekávat velké odchylky skutečné doby výpočtu od její střední hodnoty?

Čebyševova nerovnost: $P(|T_n - ET_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{\operatorname{var} T_n}{\varepsilon^2}$

kde ε je zvolená konstanta

často se ε volí v násobcích směrodatné odchylky

$\varepsilon = \sqrt{\operatorname{var} T_n} = \sqrt{8} \doteq 2{,}83$ $\quad P(|T_n - 4| \geq \sqrt{8}) \leq 1$

to neposkytuje žádnou informaci

$\varepsilon = 2\sqrt{8} \doteq 5{,}66$ $\quad P(|T_n - 4| \geq 5{,}66) \leq \frac{1}{4}$

tedy dobu výpočtu větší než 10 můžeme čekat s pstí $\leq 0{,}25$

$\varepsilon = 3\sqrt{8} \doteq 8{,}49$ $\quad P(|T_n - 4| \geq 8{,}49) \leq \frac{1}{9} \doteq 0{,}11$

tato volba je v aplikacích dost častá, říká se tomu "pravidlo 3σ"

$\varepsilon = 4\sqrt{8} \doteq 11{,}32$ $\quad P(|T_n - 4| \geq 11{,}32) \leq \frac{1}{16} \doteq 0{,}06$

tj. algoritmus vykoná více než 16 kroků s pstí $\leq 0{,}06$

atd.

Nevýhodou je, že nerovnost je oboustranná, ale nás zajímají jen odchylky směrem nahoru.

Jednostranná Čebyševova - Cantelliho nerovnost:

$$P\left(X - EX \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\operatorname{var} X}{\operatorname{var} X + \varepsilon^2}$$

např. pro $\varepsilon = 3\sqrt{8}$:

$$P\left(T_n - 4 \geq 8{,}49\right) \leq \frac{8}{8 + 9 \cdot 8} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

Je to o něco lepší odhad, ale ne o moc.

pro $\varepsilon = 4\sqrt{8}$:

$$P\left(T_n - 4 \geq 11{,}32\right) \leq \frac{8}{8 + 16 \cdot 8} = \frac{8}{8 + 128} = \frac{8}{136} = \frac{1}{17} \doteq 0{,}058$$

V případě, že neznáme rozptyl, můžeme k odhadu použít tzv. Markovovu nerovnost:

$$P(X \geq \varepsilon EX) \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

Dk: označme $EX = \mu$

$$P(X \geq \varepsilon\mu) = 1 - P(X < \varepsilon\mu) = 1 - F(\varepsilon\mu)$$

$$\mu = \sum_{k=0}^{\infty} k\, P(X=k) \geq \sum_{k=\varepsilon\mu}^{\infty} k\, P(X=k) \geq \varepsilon\mu \underbrace{\sum_{k=\varepsilon\mu}^{\infty} P(X=k)}_{P(X \geq \varepsilon\mu)} =$$

$$= \varepsilon\mu \left(1 - \sum_{k=0}^{\varepsilon\mu} P(X=k)\right) = \varepsilon\mu\left(1 - F(\varepsilon\mu)\right)$$

z toho $1 - F(\varepsilon\mu) \leq \frac{\mu}{\varepsilon\mu} = \frac{1}{\varepsilon}$

Dává hrubší odhad než Čebyševova nerovnost:

$\varepsilon = 4$: $P(T_n \geq 16) \leq \frac{1}{4}$ (z Čebyševovy nerovnosti jsme měli odhad $\frac{1}{16}$)

Zobecněná Markovova nerovnost:

$$P(|X| \geq a) \leq E\left(\frac{|X|}{a}\right)^n = \frac{E|X|^n}{a^n} \quad \text{pro } n > 0$$

Vztah mezi Markovovou a Čebyševovou nerovností:

M: $P(Y \geq r\, EY) \leq \frac{1}{r}$

nechť $Y = (X-EX)^2$, $r = \delta^2$

$$P\left((X-EX)^2 \geq \delta^2 \underbrace{E(X-EX)^2}_{\mathrm{var}\,X}\right) \leq \frac{1}{\delta^2}$$

$$P\left(|X-EX| \geq \delta\sqrt{\mathrm{var}\,X}\right) \leq \frac{1}{\delta^2}$$

položíme $\delta\sqrt{\mathrm{var}\,X} = \varepsilon$, tj. $\delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\mathrm{var}\,X}}$

$$P(|X-EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{var}\,X}{\varepsilon^2}$$ máme Č. N.

nechť $Y = |X-EX|^\alpha$, $r = \delta^\alpha$, $\alpha > 0$

z M. N. máme $P\left(|X-EX|^\alpha \geq \delta^\alpha E|X-EX|^\alpha\right) \leq \frac{1}{\delta^\alpha}$

$$P\left(|X-EX| \geq \underbrace{\delta\sqrt[\alpha]{E|X-EX|^\alpha}}_{\text{ozn. } \varepsilon}\right) \leq \frac{1}{\delta^\alpha}$$

$$P(|X-EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{E|X-EX|^\alpha}{\varepsilon^\alpha}$$

říká se tomu "nerovnosti Čebyševova typu"

Čím více momentů známe, tím ostřejší dostaneme odhad.

Čebyševova nerovnost je poměrně hrubá – vypočteme $P(T_n \geq 16)$ přesně:

$$P(T_n \geq 16) = 1 - P(T_n < 16) = 1 - [P(T_n = 2) + P(T_n = 4) + \dots + P(T_n = 14)]$$

kde $P(T_n = 2m) = 2^{-m}$, tj.: $P(T_n = 2) = \frac{1}{2}$

$P(T_n = 4) = \frac{1}{4}$

atd.

$$P(T_n \geq 16) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} \right) =$$

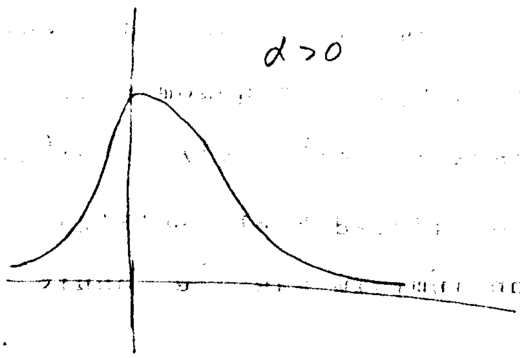
$$= 1 - \frac{64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1}{128} = 1 - \frac{127}{128} = \frac{1}{128} \doteq 0{,}0078$$

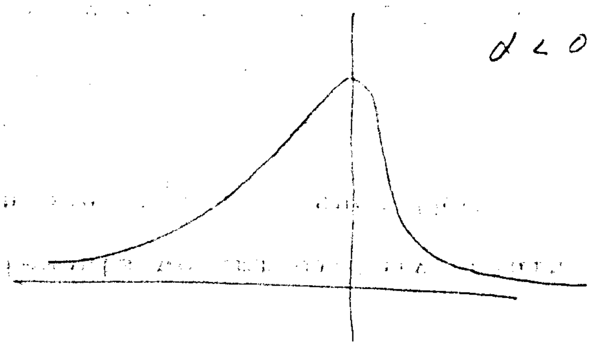
Je to tím, že znalost prvních dvou momentů rozdělení je mnohem méně, než kompletní znalost pravděpodobností!

Momenty vyšších řádů popisují další charakteristiky rozdělení:

<u>šikmost</u> $$\alpha = \frac{E(X-EX)^3}{\left(\sqrt{\operatorname{var} X}\right)^3}$$

pro rozdělení se symetrickou hustotou je $\alpha = 0$



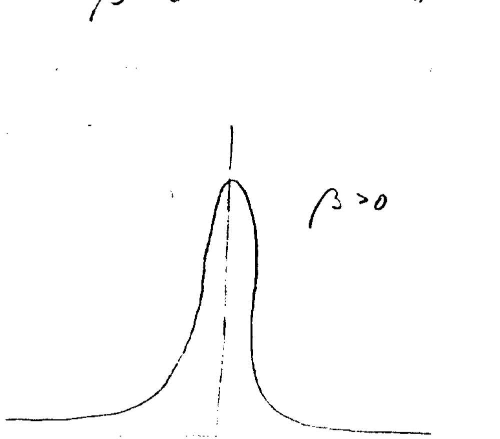


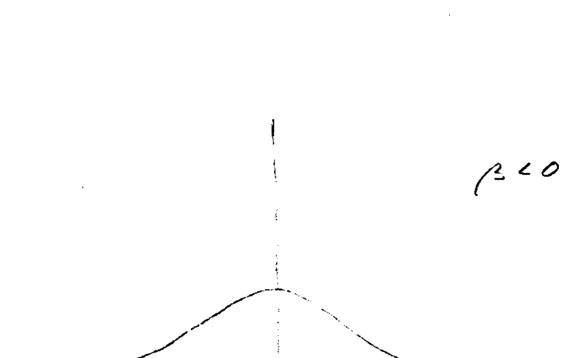
<u>špičatost</u> $$\beta = \frac{E(X-EX)^4}{(\operatorname{var} X)^2} - 3$$

$\beta = 0$ pro rozdělení $N(0,1)$

$\beta > 0$ hustota je "špičatější" než hustota $N(0,1)$

$\beta < 0$ —"— "plošší" —"—





Střední hodnota a rozptyl, případně momenty vyšších řádů nejsou jediné možné charakteristiky náhodné veličiny.

Další charakteristiky:

<u>modus</u> rozdělení (nejpravděpodobnější hodnota) (vrchol)

definuje se jako hodnota $\hat{x}$, pro kterou hustota rozdělení nabývá svého maxima, tj:

$f(\hat{x}) = \max\limits_{x \in (-\infty, \infty)} f(x)$ pro spojitá rozdělení

$P(X = \hat{x}) \geq P(X = x_i)$ pro všechny možné hodnoty x_i

modus nemusí být určen jednoznačně

V našem případě $\hat{x} = 2$: $P(T_n = 2) = \frac{1}{2}$

$P(T_n = 4) = \frac{1}{4}$

$\vdots$

$P(T_n = 2n) = 2^{-n}$

$\vdots$

$P(T_n = 2(n+1)) = 2^{-n}$

<u>medián</u> rozdělení (prostřední hodnota)

definuje se jako hodnota $\tilde{x}$, pro kterou platí

$F(\tilde{x}) = \frac{1}{2}$ pro spojitá rozdělení $\left(P(X < \tilde{x}) = \frac{1}{2} = P(X \geq \tilde{x})\right)$

$F(\tilde{x}) \leq \frac{1}{2}$ a $F(\tilde{x} + 0) \geq \frac{1}{2}$ pro diskrétní rozdělení

(limita v $\tilde{x}$ zprava)

medián nemusí být určen jednoznačně

u diskrétních rozdělení záleží na tom, jak se definuje distribuční fce, zda jako $P(X < x)$ nebo jako $P(X \leq x)$

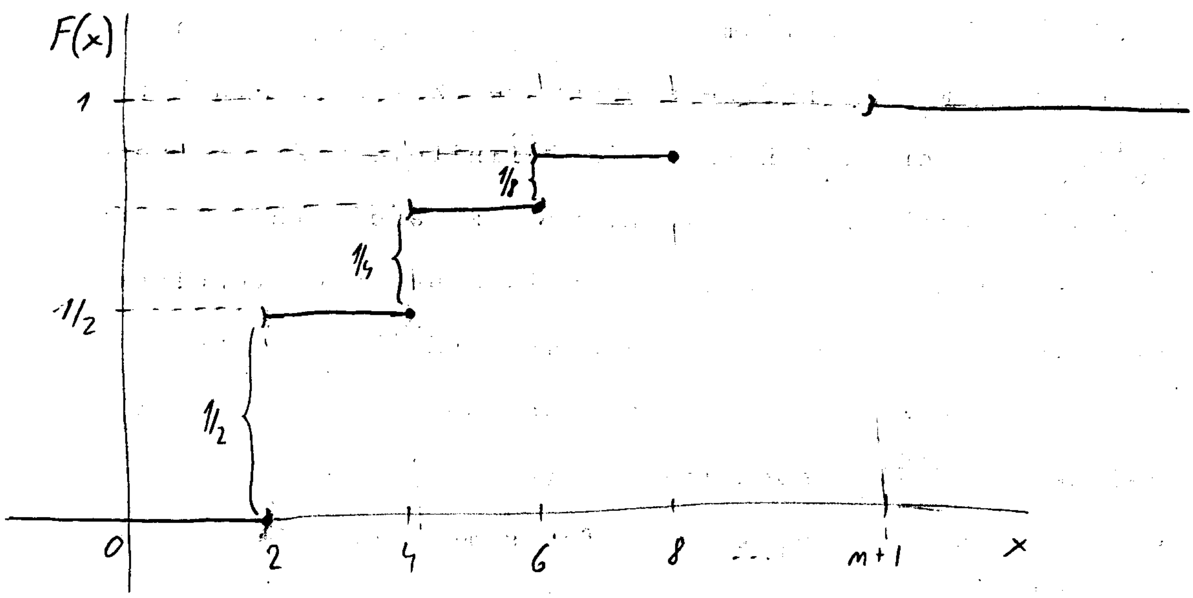
V našem případě $\tilde{x} = \langle 2, 4 \rangle$, tj. $\tilde{x} = 2$ nebo $\tilde{x} = 4$

$$P(T_n < 2) = 0 \leq \frac{1}{2} \qquad P(T_n < 2+\varepsilon) = \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

$$P(T_n < 3) = \frac{1}{2} \qquad P(T_n < 3+\varepsilon) = \frac{1}{2}$$

$$P(T_n < 4) = \frac{1}{2} \qquad P(T_n < 4+\varepsilon) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{2}$$

distribuční fce vypadá takto:



Medián má proti střední hodnotě jednu výhodu - existuje pro každé rozdělení, zatímco střední hodnota vždycky existovat nemusí.

Markovovy řetězce (Lachout, Prášková)

Je to posloupnost celočíselných náh. veličin $X_0, X_1, X_2, \dots$,

když $X_n = j$ říkáme, že proces je v čase n ve stavu j.

$P(X_0 = j) = a_j$ je nějaké počáteční rozdělení

dále platí:

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) =$$

$$= p_{ij}(n, n+1) \quad \dots \text{ pst přechodu ze stavu } i \text{ do stavu } j$$

homogenní řetězec: $p_{ij}(n, n+1) = p_{ij}$ nezávisí na n

$\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j}$ je matice pstí přechodu

$p_{ij}^{(k)}$ … pst přechodu ze stavu i do j po k krocích

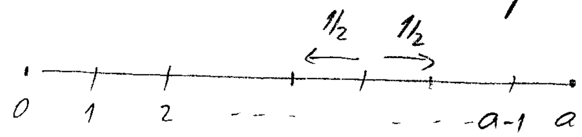
platí: $p_{ij}^{(k)} = (\mathbb{P}^k)_{ij}$ … k-tá mocnina matice $\mathbb{P}$

dosažitelnost: stav j je dosažitelný z i, jestliže ex. $k \geq 0$ tak, že $p_{ij}^{(k)} > 0$

uzavřená množina stavů: žádný stav vně této množiny není dosažitelný z žádného stavu uvnitř

absorpční stav: platí pro něj $p_{jj} = 1$ (je to jednobodová uzavřená množina)

Příklad Markovského procesu: náhodná procházka po přímce s pohlcujícími stěnami



$$P = \begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & 2 & \dots & a-1 & a \\ \hline 0 & 1 & & & & & \\ 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ a-1 & \dots & & & 1/2 & 0 & 1/2 \\ a & \dots & & & & & 1 \end{array}$$

Počítání s pravděpodobnostmi:

1) pst každé konečné posloupnosti stavů $j_0, j_1, \dots, j_n$

$$P(j_0, j_1, \dots, j_{n-1}, j_n) = p_{j_0} p_{j_0, j_1} p_{j_1, j_2} \cdots p_{j_{n-1}, j_n}$$

2) $$p_{ij}(m,n) = \sum_k p_{ik}(m,r)\, p_{kj}(r,n) \qquad \forall\, m \le r \le n$$

3) stacionární rozdělení (pokud existuje)

$$v_j = P(\text{proces je ve stavu } j) = \lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)}$$ nezávisí na výchozím stavu i

$$v_j = \sum_i v_i p_{ij}$$

ad 2): speciálně $$p_{ij}(n, n+2) = \sum_k p_{ik}(n, n+1)\, p_{kj}(n+1, n+2)$$

pro homogenní řetězec $$p_{ij}^{(2)} = \sum_k p_{ik} p_{kj}$$

Výpočet podle tohoto algoritmu se dá charakterizovat Markovským řetězcem:

Je-li hlava na políčku a_i, s pstí $\frac{1}{2}$ jde na a_{i+1} (z a_{n-1} na b_n), s pstí $\frac{1}{2}$ se začne vracet (tj. jde na b_{i-1}, resp. z a_0 na konec).

Je-li hlava na políčku b_i, s pstí 1 jde na b_{i-1}.

Z počáteční pozice jde s pstí 1 na a_0.

Dostane-li se do koncové pozice, už tam setrvá.

Stavy řetězce: $*, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_n, b_{n-1}, \dots, b_1, b_0, *$

Matice pravděpodobností přechodu

$$
\begin{array}{c} \\ \text{vstup} \\ a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_1 \\ \text{výstup} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} \text{vstup} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & b_n & b_{n-1} & \dots & b_1\ b_0 & \text{výstup} \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccccccccc}
0 & 1 & 0 & 0 & \dots & & & & & 0 \\
0 & 0 & 1/2 & 0 & \dots & & & & 0 & 1/2 \\
0 & 0 & 0 & 1/2 & \dots & & & 0 & 1/2 & 0 \\
& & & \ddots & & & \iddots & & & \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & & 0 & 1 & 0 & \dots & & 0 \\
0 & 0 & \dots & & & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
& & \iddots & & & & & \ddots & & \\
0 & 0 & \dots & & & & & & 1 & 0 \\
0 & 0 & \dots & & & & & & 0 & 1 \\
0 & 0 & \dots & & & & & & 0 & 1
\end{array}\right)
\end{array} = P
$$

Z tvaru matice P je vidět, že:

výstup je jediný absorbční stav řetězce (výpočet nemůže skončit jinde)

výstup je dosažitelný z každého stavu řetězce (algoritmus je přechodný)

neexistuje uzavřená množina stavů, která by neobsahovala
výstupní stav (výpočet se nezacyklí)

stavy s nižšími čísly nejsou dosažitelné ze stavů s vyššími
čísly (výpočet se nevrací)

Doba výpočtu: $P(T_m = 2m) = P(\text{vstup}, a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, b_{m-2}, \dots$

$\dots b_1, b_0, \text{výstup}) =$

$$= p_{\text{vstup}, a_0}\, p_{a_0, a_1} \cdots p_{a_{m-1}, b_{m-2}} \cdots p_{b_1, b_0}\, p_{b_0, \text{výstup}}$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^m$$

Pozor!: $P(T_m = 2m) = P($systém se dostane ze vstupního do výstupního stavu po $2m$ krocích poprvé$) = f^{(2m)}_{\text{vstup}, \text{výstup}}$

není to $p^{(2m)}_{\text{vstup}, \text{výstup}}$ ... prst přechodu po $2m$ krocích (prvek matice P^{2m})

platí vztah $$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)}\, p_{jj}^{(n-k)}$$