(Hofri, Knuth I, Rényi)

Hledání maxima v permutaci - pomocné pojmy a tvrzení

1) binomické koeficienty $\binom{n}{k}$

pro n, k přirozené, $n \geq k$ jsou definovány vztahem

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \qquad \text{(binomická věta)}$$

počítají se jako $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

praktický význam: k-prvkové kombinace z n prvků bez opakování

$\binom{n}{k}$ ... kombinační čísla

pro k přirozené, n reálné jsou definovány vztahem

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k, \text{ kde } x \in (-1, 1) \qquad \text{(binomická řada)}$$

počítají se jako $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$

má tedy smysl např. $\binom{-3}{2} = \dfrac{(-3)(-4)}{2} = (-1)^2 \dfrac{4\cdot 3}{2} = (-1)^2\binom{4}{2}$

obecně platí $\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$

tady už nemají smysl k-tice vybíraných z n prvků

Příklad použití negativních binomických koeficientů:

negativní binomické rozdělení

Provádíme sérii vzájemně nezávislých náh. pokusů, každý z nich může skončit úspěchem nebo neúspěchem. $P(U)=p$, $P(N)=1-p$.

Náh. veličina X značí číslo pokusu, ve kterém úspěch nastal po r-té

$$P(X=k+r)=\binom{k+r-1}{r-1}p^{r-1}\,p\,(1-p)^k=\binom{k+r-1}{r-1}p^r(1-p)^k$$

$k=0,1,2,\dots$ počet neúspěchů předcházejících r-tému úspěchu

$$P(X=k+r)=\binom{k+r-1}{k}p^r(1-p)^k=(-1)^k\binom{-r}{k}p^r(1-p)^k$$

2) Stirlingova čísla 1. druhu $\left[{n \atop k}\right]$ – pro n, k přirozená jsou definována takto: $x(x-1)\dots(x-n+1) = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right](-1)^{n-k} x^k$

neboli $n!\binom{x}{n} = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right](-1)^{n-k} x^k$

speciální hodnoty: $\left[{n \atop 0}\right] = 0$, $\left[{n \atop n}\right] = 1$, $\left[{n \atop 1}\right] = (n-1)!$

(dostaneme porovnáním koeficientů u příslušných mocnin x na levé a na pravé straně)

$$\left.\begin{aligned} &\text{pro } x=1 \text{ máme: } \quad 0 = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right](-1)^{n-k} \\ &\text{pro } x=-1 \text{ máme: } \quad (-1)^n n! = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right](-1)^n \\ &\qquad \text{neboli } \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right] = n! \end{aligned}\right\} \text{ pro } n \geq 2$$

dále $\left[{n \atop k}\right] = 0$ pro $k > n$

Kde se s nimi můžeme setkat?

Nechť $G_X(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k p_k$ je vytvořující fce náh. vel. X

pak $G_X'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k x^{k-1} p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} p_k$

$$G_X'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k \quad (= EX)$$

$$G_X''(1) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) p_k \quad (= EX(X-1))$$

obecně $G_X^{(n)}(1) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\dots(k-n+1) p_k \quad (= EX(X-1)\dots(X-n+1)$

tzv. faktoriální moment

pro $n=0$: $G_X^{(0)}(1) = G_X(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$

označme $M_s = E(X^s) = \sum_{k=0}^{\infty} k^s p_k$ pro $s = 0, 1, 2, \dots$

(tzv. s-tý obecný moment náh. veličiny X)

platí: $G_X(1) = M_0 = 1$

$G_X'(1) = M_1$

$G_X''(1) = M_2 - M_1$

$G_X'''(1) = M_3 - 3M_2 + 2M_1$

atd.

obecně: $G_X^{(n)}(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[{n \atop k} \right] (-1)^{n-k} M_k$

protože $G_X^{(n)}(1) = \sum_{j=0}^{\infty} j(j-1)\dots(j-n+1) p_j =$

$$= \sum_j \sum_k \left[{n \atop k} \right] (-1)^{n-k} j^k p_j =$$

$$= \sum_k \left[{n \atop k} \right] (-1)^{n-k} \sum_j j^k p_j =$$

$$= \sum_k \left[{n \atop k} \right] (-1)^{n-k} M_k$$

praktický význam: uvádíme na chvíli počet permutací, které mají k cyklů

3) Stirlingova čísla 2. druhu $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ – pro k, n přirozená

jsou definována vztahem $$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\langle {n \atop k} \right\rangle x(x-1)\dots(x-k+1)$$

neboli $$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\langle {n \atop k} \right\rangle k! \binom{x}{k}$$

speciální hodnoty: $\left\langle {n \atop 0} \right\rangle = 0$, $\left\langle {n \atop 1} \right\rangle = 1$, $\left\langle {n \atop n} \right\rangle = 1$

$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = 0$ pro $k > n$

Zkusme napřed vyjádřit obecné momenty pomocí derivací vytvořující fce:

$M_0 = G_X(1) = 1$

$M_1 = G_X'(1)$

$M_2 = G_X'(1) + G_X''(1)$

atd.

$$M_n = \sum_j j^n p_j = \sum_j \sum_k \left\langle {n \atop k} \right\rangle j(j-1)\dots(j-k+1) p_j =$$

$$= \sum_k \left\langle {n \atop k} \right\rangle \sum_j j(j-1)\dots(j-k+1) p_j = \sum_k \left\langle {n \atop k} \right\rangle G_X^{(k)}(1)$$

Praktický význam: počet způsobů, jak lze rozmístit n rozlišitelných předmětů do m nerozlišitelných přihrádek tak, aby žádná nezůstala prázdná máme n rozlišitelných předmětů, m rozlišitelných přihrádek

$$P(\text{žádná přihrádka není prázdná}) = 1 - P(\text{alespoň 1 prázdná}) =$$

i přihrádek prázdných

$$= 1 - P\Big(\bigcup_{i=1}^{m} \cancel{\text{i-tá přihrádka}}\ \text{prázdná}\Big) =$$

$$= 1 - \binom{m}{1}\frac{(m-1)^n}{m^n} + \binom{m}{2}\frac{(m-2)^n}{m^n} \cdots + (-1)^m \binom{m}{m}\frac{(m-m)^n}{m^n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}(-1)^k \frac{(m-k)^n}{m^n} = \frac{1}{m^n}\underbrace{\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k (m-k)^n}_{R \,=\, \text{počet příznivých rozmístění}}$$

platí identita: $\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k} k^n (-1)^k = (-1)^m m! \left\langle {n \atop m} \right\rangle$

$= (-1)^k$

$$R = (-1)^m \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{m-k}(-1)^{k-m}(m-k)^n = (-1)^m \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{-k} k^n =$$

$$= (-1)^{2m} m! \left\langle {n \atop m} \right\rangle = m! \left\langle {n \atop m} \right\rangle$$

Jsou-li přihrádky nerozlišitelné, počet takových rozmístění bude $\frac{1}{m!}R$, tj. $\left\langle {n \atop m} \right\rangle$

Jinak: $\left\langle {n \atop m} \right\rangle$ je počet rozkladů n-prvkové množiny na m neprázdných disjunktních podmnožin.

Hodnoty Stirlingových čísel 1. i 2. druhu přesně nebo přibližně se dají najít v některých tabulkách.

Vytvořující funkce náhodných veličin (Rényi)

Předpoklad: X je náhodná veličina, která může nabývat jen nezáporných celočíselných hodnot

$$P(X=k)=p_k, \quad k=0,1,\dots$$

Vytvořující fce je $G_X(z)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$, kde z je obecné komplexní číslo

Protože $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, řada konverguje alespoň pro $|z| \le 1$ a součet je analytická fce regulární uvnitř jednotkového kruhu.

1) Vytvořující fce je jednoznačně určena rozdělením náhodné veličiny. Rozdělení náhodné veličiny je jednoznačně určeno její vytvořující fcí.

Platí: $p_0 = G_X(0)$

$$p_k = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!} \quad \text{pro } k=1,2,\dots$$

2) Příklady:

a) 0-1 rozdělení: $P(X=1)=p,\ P(X=0)=1-p=q$

$$G_X(z) = q + pz$$

b) binomické rozdělení: $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$

$$G_X(z)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k} z^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(pz)^k q^{n-k} = (pz+q)^n$$

c) Poissonovo rozdělení: $P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

$$G_X(z)=\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} z^k = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda z)^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda z} = e^{\lambda(z-1)}$$

3) Výpočet momentů

Platí: $$G_X'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = EX$$

$$G_X''(1) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) p_k = EX(X-1)$$

dále např. $\operatorname{var} X = E(X-EX)^2 = EX^2 - (EX)^2 = EX(X-1) + EX - (EX)^2 =$

$$= G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X')^2$$

Příklad: binomické rozdělení $G_X(z) = (pz+q)^n$

$$G_X'(z) = n(pz+q)^{n-1} p$$

$$G_X'(1) = n(p+q)^{n-1} p = np$$

$$G_X''(z) = n(n-1)(pz+q)^{n-2} p^2$$

$$G_X''(1) = n(n-1)p^2$$

$$EX = np$$

$$\operatorname{var} X = \cancel{n^2p^2} - np^2 + np - \cancel{n^2p^2} = np(1-p) = npq$$

Obecně: $$G_X^{(r)}(1) = \sum_{k=r}^{\infty} k(k-1)\dots(k-r+1)p_k \quad \left(= \sum_{k=1}^{\infty} \dots \right)$$

definujeme Stirlingova čísla 1. druhu $\left[{r \atop j}\right]$ rovností

$$x(x-1)\dots(x-r+1) = \sum_{j=1}^{r} \left[{r \atop j}\right] x^j$$

pak $$G_X^{(r)}(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r} \left[{r \atop j}\right] k^j p_k = \sum_{j=1}^{r} \left[{r \atop j}\right] \sum_{k=1}^{\infty} k^j p_k =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \left[{r \atop j}\right] EX^j$$

obráceně $EX^s = \sum_{j=1}^{s} \left\langle {s \atop j} \right\rangle G_X^{(j)}(1)$

kde $\left\langle {s \atop j} \right\rangle$ jsou Stirlingova čísla 2. druhu definovaná

rovností $x^s = \sum_{j=1}^{s} \left\langle {s \atop j} \right\rangle x(x-1)\dots(x-j+1)$

4) Pro nezávislé náhodné veličiny X, Y platí $G_{X+Y}(z) = G_X(z) \cdot G_Y(z)$.

Nechť $Z = X+Y$, $P(X=n) = p_n$, $P(Y=m) = q_m$.

$$P(Z=k) = \sum_{n+m=k} P(X=n, Y=m) = \sum_{n+m=k} p_n q_m =$$

konvoluce
$$\begin{cases} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} p_j q_{k-j} & \text{když } n, m = \dots -1, 0, 1, \dots \\ = \sum_{j=0}^{k} p_j q_{k-j} & \text{když } n, m = 0, 1, \dots \end{cases}$$

$$G_X(z) \cdot G_Y(z) = \sum_n p_n z^n \sum_m q_m z^m = \sum_n \sum_m p_n q_m z^{n+m} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} p_j q_{k-j} \right) z^k$$

Příklad: $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, $P(Y=l) = \binom{m}{l} p^l q^{m-l}$

nezávislé s binomickým rozdělením se stejným parametrem p,

liší se pouze parametry n a m

konvoluce: $P(X+Y=k) = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}\binom{m}{k-j} p^{j} q^{n-j} p^{k-j} q^{m-k+j} =$

$$= \underbrace{\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}\binom{m}{k-j}}_{\binom{n+m}{k}} p^{k} q^{n+m-k} = \binom{n+m}{k} p^{k} q^{n+m-k}$$

Součet má binomické rozdělení s parametry p, $n+m$.

vytvořující fce $G_{X+Y}(x) = (px+q)^{n}(px+q)^{m} = (px+q)^{n+m}$

Jiný příklad: $X_1, \dots, X_n$ jsou nezávislé náh. veličiny s 0-1 rozdělením

$P(X_i = 1) = p$, $P(X_i = 0) = q$ pro $i = 1, \dots, n$

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ má binomické rozdělení s parametry n, p

$$G_X(x) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(x) = \prod_{i=1}^{n} (px+q) = (px+q)^{n}$$

5) Součet náhodného počtu sčítanců

Náhodné veličiny $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ mají stejné rozdělení s vytvořující fcí $G(x)$, N je celočíselná náh. veličina na nich nezávislá. Pak $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ má vytvořující fci $G_N(G(x))$.

6) Směs rozdělení

Nechť veličiny $X_0, X_1, \ldots$ mají rozdělení $P(X_n = k) = p_{nk}$ a veličina Y má rozdělení $P(Y=k) = q_k = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n p_{nk}$,

kde $\alpha_n \geq 0$ pro vš. n a $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = 1$. Pak

$$G_Y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n p_{nk} x^k = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_{nk} x^k \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n G_{X_n}(x).$$

7) Nezávislost

Sdružená vytvořující fce veličin X, Y se definuje jako

$$G_{X,Y}(x_1, x_2) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} P(X=j, Y=k) x_1^j x_2^k.$$

Veličiny X a Y jsou nezávislé právě tehdy, když platí

$$G_{X,Y}(x_1, x_2) = G_X(x_1) \cdot G_Y(x_2).$$

8) Limitní rozdělení

Máme náhodné veličiny X_n s rozdělením $P(X_n = k) = p_{nk}$.

Konvergence $\lim_{n\to\infty} p_{nk} = p_k$, kde $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, je ekvivalentní

s konvergencí vytvořujících funkcí $\lim_{n\to\infty} G_n(x) = G(x)$, kde

$G_n(x)$ jsou vytvořující fce X_n a $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k$.

Příklad: binomické rozdělení konverguje k Poissonovu pro $n \to \infty$, když $np = \lambda$

přímo: $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{n-k} =$

$$= \frac{n^k p^k}{k!} \underbrace{1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}_{\to 1} (1-p)^n (1-p)^{-k}$$

dosadíme $p = \frac{\lambda}{n}$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\to e^{-\lambda}} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1} = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$$

z vytvořující fce:

$$(px+q)^n = (px+1-p)^n = (1+p(x-1))^n = \left(1+\frac{\lambda(x-1)}{n}\right)^n \to e^{\lambda(x-1)}$$