I.

Quicksort (Hoare 1961, 62) (Mehlhorn)

máme permutaci prvků $\{1, 2, \dots, n\}$

vybereme z ní jeden prvek k (deterministicky nebo náhodně)

a vytvoříme množiny $M_1 = \{\text{prvky} < k\}$ = permutace $\{1, \dots, k-1\}$

$M_2 = \{\text{prvky} > k\}$ = permutace $\{k+1, \dots, n\}$

na M_1 a M_2 se rekurzivně volá Quicksort

doba výpočtu: $T(n) = 1 + n + T(k-1) + T(n-k)$

maximální doba výpočtu:

$$T(n) \le 1 + n + \max_{1 \le k \le n} \{T(k-1) + T(n-k)\} \le$$

$$\le 1 + n + T(n-1) \le 1 + n + n + T(n-2) +$$

$$\dots = 1 + n + n + n-1 + n-2 + \dots \; O(n^2)$$

očekávaná doba výpočtu:

1) deterministický Quicksort - dělicí bod se volí pevně (např. a_1)

permutace je náhodná

střední hodnota se bere přes všechny permutace - je jich $n!$

počet permutací, kde $a_1 = k$ je $(n-1)!$

$P(\text{permutace, kde } a_1 = k) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$

očekávaná doba výpočtu je

$$ET(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(1 + n + ET(k-1) + ET(n-k)\right) =$$

$$= 1 + n + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} ET(k-1) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} ET(n-k) =$$

./.

%

$$ET(n) = \sum_j j\, P(T(n)=j) \quad \text{podle definice}$$

$$= \sum_j j \sum_k P(T(n)=j \mid a_1 = k)\, P(a_1 = k) \quad \text{podle věty o celkové psti}$$

$$= \sum_j j \sum_k P\left(1 + n + T(k-1) + T(n-k) = j\right) \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_k \sum_j j\, P\left(1 + n + T(k-1) + T(n-k) = j\right) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_k E\left(1 + n + T(k-1) + T(n-k)\right) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_k \left(1 + n + ET(k-1) + ET(n-k)\right)$$

$$ET(n) = 1 + n + \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} ET(k)$$

$$n\, ET(n) = n(n+1) + 2\sum_{k=0}^{n-1} ET(k) \qquad (I)$$

$$(n+1)\, ET(n+1) = (n+1)(n+2) + 2\sum_{k=0}^{n} ET(k) \qquad (II)$$

odečteme (I) od (II):

$$(n+1)ET(n+1) - n\,ET(n) = (n+1)(n+2) - n(n+1) + 2ET(n)$$

$$ET(n+1) = \frac{n+2}{n+1} ET(n) + 2$$

počáteční podmínky: $ET(0) = ET(1) = 0$

postupným dosazením (nebo indukcí) by mělo vyjít

$$ET(n) = 2\sum_{i=2}^{n} \frac{n+1}{i+1} = 2(n+1)\left(H_{n+1} - \frac{3}{2}\right) \sim (n+1)\log_2(n+1)$$

tedy $ET(n)$ je $O(n \log_2 n)$

2) randomizovaný Quicksort – permutace je pevná;
dělicí bod se volí náhodně
očekávaná hodnota se počítá přes všechny možné volby
dělicího bodu – každý má pravděpodobnost $\frac{1}{n}$
rekurentní vztah bude stejný

rozptyl doby výpočtu: $\frac{21 - 2\pi^2}{9} n^2$ (Knuth)

Jiný způsob řešení rovnice $ET(n) = n+1 + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} ET(k-1)$

je to příklad na použití vytvořujících funkcí

Zatím jsme měli vytvořující fce pro náhodné veličiny, def. jako

$$G_X(x) = \sum_k p_k x^k, \text{ kde } p_k = P(X=k).$$

Vytvořující fce se dá ale definovat pro obecnou posloupnost,

nejen pro posloupnost pravděpodobností.

Zavedeme vytvořující fci pro posloupnost $c_n = ET(n)$ jako

$$C(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n = \sum_{n\geq 1} c_n x^n, \text{ položme } c_0 = 0$$

Naši rovnici přepíšeme : $c_n = n+1 + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} c_{k-1} \;/\cdot n, \cdot x^n, \sum_n$

dostaneme : $$nc_n = n(n+1) + 2\sum_{k=1}^{n} c_{k-1}$$

$$nc_n x^n = n(n+1)x^n + 2\sum_{k=1}^{n} c_{k-1} x^n$$

$$\sum_n nc_n x^n = \sum_n n(n+1)x^n + 2\sum_n\sum_{k=1}^{n} c_{k-1} x^n$$

máme : $C'(x) = \sum_n c_n n x^{n-1} \Rightarrow \sum_n nc_n x^n = x C'(x)$

$$\left(\sum_n x^{n+1}\right)'' = \left(\sum_n (n+1)x^n\right)' = \sum_n n(n+1)x^{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_n n(n+1)x^n = x\left(\sum_n x^{n+1}\right)'' =$$

$$= x\left(\frac{x}{1-x}\right)' = x\left(\frac{1-x+x}{(1-x)^2}\right)' = x\left((1-x)^{-2}\right)' =$$

$$= x(-2)(1-x)^{-3}(-1) = \frac{2x}{(1-x)^3}$$

s posledním členem vpravo je to složitější

napřed obecně: nechť $A(x) = \sum_{i\geq 0} a_i x^i$, $B(x) = \sum_{j\geq 0} b_j x^j$

$$\text{pak } A(x)B(x) = \sum_{i\geq 0} a_i x^i \sum_{j\geq 0} b_j x^j = \sum\sum_{i,j\geq 0} a_i b_j x^{i+j} =$$

$$= \sum_{n\geq 0} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)}_{\text{konvoluce}} x^n$$

my máme $\sum_{n\geq 1} \sum_{k=1}^{n} c_{k-1} x^n = \sum_n \left(\sum_k 1 \cdot c_{k-1}\right) x^n =$

$$= C(x) \sum_{n\geq 1} 1 \cdot x^n = C(x) \cdot \frac{x}{1-x}$$

takže: $xC'(x) = \frac{2x}{(1-x)^3} + \frac{2x}{1-x} C(x)$

$$C'(x) = \frac{2}{(1-x)^3} + \frac{2}{1-x} C(x)$$

to je obyčejná lineární diferenciální rovnice 1. řádu

řešení: 1) nalezení řešení homogenní rovnice

2) metoda variace konstant

Obecně: mějme dif. rovnici tvaru $y' + a(x)y = b(x)$

(y je taky funkce, ale argument se pro jednoduchost vynechává)

k ní příslušná homogenní rovnice je $y' + a(x)y = 0$

neboli $\dfrac{y'}{y} = -a(x)$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int a(x)dx$$

$$\ln y = -\int a(x)dx \Rightarrow y = e^{-\int a(x)dx}$$ je řešení

metoda variace konstant:

předp., že $y = Q(x)e^{-\int a(x)dx}$, $Q(x)$ se musí dopočítat

zderivujeme: $y' = Q'(x)e^{-\int a(x)dx} - Q(x)a(x)e^{-\int a(x)dx}$

dosadíme do rovnice $y' + a(x)y = b(x)$:

$$Q'(x)e^{-\int a(x)dx} - \cancel{Q(x)a(x)e^{-\int a(x)dx}} + \cancel{a(x)Q(x)e^{-\int a(x)dx}} = b(x)$$

máme $Q'(x)e^{-\int a(x)dx} = b(x)$

$$Q'(x) = b(x)e^{\int a(x)dx}$$

$$Q(x) = \int b(x)e^{\int a(x)dx}dx$$

výsledné řešení: $y = e^{-\int a(x)dx}\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx$

Pro nás:

homogenní rovnice je $\rho'(x) - \frac{2}{1-x}\rho(x) = 0$

má řešení $\rho(x) = e^{\int \frac{2}{1-x}\,dx} = e^{\ln \frac{1}{(1-x)^2}} = \frac{1}{(1-x)^2}$

(výpočet integrálu substitucí $1-x = u$)

řešení původní rovnice:

$$C(x) = \frac{1}{(1-x)^2}\int \frac{2}{(1-x)^3}(1-x)^2\,dx = \frac{2}{(1-x)^2}\int \frac{1}{1-x}\,dx =$$

$$= \frac{2}{(1-x)^2}\ln\frac{1}{1-x}$$

Tím máme vytvořující fci, zbývá dopočítat koeficienty c_n.

obecně se počítají podle vzorce $c_n = \frac{C^{(n)}(0)}{n!}$

např. $C'(x) = \sum_n c_n n x^{n-1} \Rightarrow C'(0) = c_1$

$$C''(x) = \sum_n c_n n(n-1)x^{n-2} \Rightarrow C''(0) = 2c_2$$

$$C'''(x) = \sum_n c_n n(n-1)(n-2)x^{n-3} \Rightarrow C''(0) = 6c_3$$

atd.

$$C'(x) = \frac{4}{(1-x)^3} \ln \frac{1}{1-x} + \frac{2}{(1-x)^2} \cdot (1-x) \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{4}{(1-x)^3} \ln \frac{1}{1-x} + \frac{2}{(1-x)^3} =$$

$$= \frac{2}{(1-x)^3} \left(2 \ln \frac{1}{1-x} + 1 \right) = \frac{2}{(1-x)^3} 2 \left(\ln \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \right)$$

$$C'(0) = c_1 = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2(1+1)(H_2 - 1)$$

$$C''(x) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \frac{1}{(1-x)^4} \left(\ln \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \right) + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{(1-x)^3} \left(\frac{1}{(1-x)^2} (1-x) \right) =$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 3 \frac{1}{(1-x)^4} \left(\ln \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right)$$

$$C''(0) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right)$$

$$c_2 = 2 \cdot 3 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = 2(2+1)(H_3 - 1)$$

$$C^{(3)}(x) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \frac{1}{(1-x)^5} \left(\ln \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) +$$

$$+ 2 \cdot 2 \cdot 3 \frac{1}{(1-x)^4} \left((1-x) \frac{1}{(1-x)^2} \right) =$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \frac{1}{(1-x)^5} \left(\ln \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right)$$

$$C^{(3)}(0) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right)$$

$$c_3 = 2 \cdot 4 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = 2(3+1)(H_4 - 1)$$

atd.

výsledek: $c_n = 2(n+1)(H_{n+1} - 1)$

Tento postup je výpočetně komplikovanější než předchozí trik s odečtením rekurentních rovnic, zato je obecně použitelný, kdežto trik se dá použít jen ve speciálních případech.

Výpočet koeficientů c_n jinak a lépe.

Máme $C(x) = \frac{2}{(1-x)^2} \ln \frac{1}{1-x}$

víme: $\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i\right)' = \sum_{i=0}^{\infty} (x^i)' = \sum_{i=0}^{\infty} i x^{i-1} = \frac{1}{x} \sum_{i=0}^{\infty} i x^i$

$$\ln \frac{1}{1-x} = -\ln(1-x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j}$$

tedy $C(x) = \frac{2}{x} \sum_{i=0}^{\infty} i x^i \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} x^j = 2 \sum_{i=0}^{\infty} i x^i \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} x^{j-1} =$

$$= 2 \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} i x^i}_{A(x)} \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j+1} x^j}_{B(x)} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k \right) x^n =$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (n-k) \cdot \frac{1}{k+1} \right) x^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n+1-(k+1)}{k+1} \right) x^n =$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{n+1} \right) \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{2(n+1)(H_{n+1} - 1)}_{c_n} x^n$$

(Sedgewick, Flajolet)

Výpočet priemernej zložitosti quicksortu

Július Štroffek, MFF UK Praha, 4.ročník, Informatika

V tomto texte sa budeme zaoberať výpočtom priemernej časovej zložitosti vzhľadom na počet porovnaní algoritmu quicksort, resp. jeho modifikácie, kde budeme vyberať pivota ako medián troch prvkov. Ukážeme, že táto modifikácia quicksortu má síce rovnakú asymptotickú zložitosť, ale priemerný počet porovnaní je menší. Najskôr si odvodíme rekurentný vzťah na priemerný počet porovnaní, zavedieme pojmy potrebné k jeho vyriešeniu a v závere vyjadríme rekurentný vzťah explicitne.

Odvodenie rekurentného vzťahu

Označme C_N priemerný počet krokov algoritmu na vstupe veľkosti N. Potom zrejme

$$C_N = N + 1 + \sum_{1 \le k \le N} P_k \cdot (C_{k-1} + C_{N-k})$$

kde P_k označuje pravdepodobnosť, že pivot je k-tym prvkom utriedenej postupnosti.

Na nájdenie mediánu troch prvkov treba dve porovnania a ďalších $N-1$ porovnaní je potrebných na rozdelenie postupnosti vzhľadom na vybraného pivota. Suma nám vyjadruje priemerný počet porovnaní pri rekurzívnom volaní (z definície strednej hodnoty). Zostáva nám spočítať P_k. Keďže každá trojica je rovnako pravdepodobná, použijeme priamo definíciu pravdepodobosti. Pokiaľ máme mať k-ty prvok v utriedenej postupnosti ako medián troch prvkov, musíme k nemu vybrať jeden menší a jeden väčší prvok. Tých menších je $k-1$ a väčších $N-k$, takže hľadaný počet trojíc je $(k-1)(N-k)$, všetkých trojíc je zrejme $\binom{N}{3}$, takže

$$P_k = \frac{(k-1)(N-k)}{\binom{N}{3}}$$

Máme teda

$$C_N = N + 1 + \sum_{1 \le k \le N} \frac{(k-1)(N-k)}{\binom{N}{3}} (C_{k-1} + C_{N-k}) \tag{1}$$

Generujúce funkcie

Definícia. *Majme nekonečnú postupnosť $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$, funkciu*

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

nazveme obyčajnou generujúcou funkciou - OGF (angl. ordinary generating function). Výrazom $[A(z)]_N$ budeme označovať N-tý člen a_N generujúcej postupnosti.

Pozorný čitateľ si určite uvedomil, že OGF sa nápadne podobá na mocninnú radu zo stredom v bode 0. Nás však nebude zaujímať kde a za akých podmienok rada konverguje - t.j. jej polomer konvergencie, ale budeme predpokladať, ze konverguje „vždy keď to potrebujeme“. Overenie predpokladov konvergencie prenecháme čitateľovi ako cvičenie.

Príklad niektorých OGF:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{N=0}^{\infty} z^N$$

$$\frac{1}{1-z^2} = \sum_{N=0}^{\infty} z^{2N}$$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{N=0}^{\infty}(N+1)z^N \tag{2}$$

$$\frac{1}{(1-z)^{M+1}} = \sum_{N=0}^{\infty}\binom{N+M}{N}z^N \tag{3}$$

$$\frac{1}{1-z}\ln\frac{1}{1-z} = \sum_{N=0}^{\infty}H_N z^N \tag{4}$$

kde

$$H_N = \begin{cases} 0 & \text{pre } N = 0 \\ \sum_{k=1}^{N} 1/k & \text{pre } N > 0 \end{cases}$$

Veta 1. *(operácie s obyčajnými generujúcimi funkciami) Majme dve postupnosti $a_0, a_1, \ldots$ a $b_0, b_1, \ldots$ ktoré odpovedajú dvom obyčajným generujúcim funkciám $A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ a $B(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ potom platí:*

a) $A(z) + B(z)$ je OGF pre radu $a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots$
b) $zA(z)$ je OGF pre radu $0, a_0, a_1, a_2, \ldots$
c) $A'(z)$ je OGF pre radu $a_1, 2a_2, 3a_3, 4a_4, \ldots$
d) $A(z)B(z)$ je OGF pre radu $a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0$
Teda $[A(z)B(z)]_N = \sum_{k=0}^{N} a_k b_{N-k}$

Tieto vlastnosti nám už stačia na to, aby sme našli explicitné vyjadrenie rekurentného vzťahu (1).

Riešenie rekurentného vzťahu

Predpokladajme, že $C_0 = C_1 = C_2 = 0$. Ďalej nech C_N tvoria radu, ktorej generujúca funkciu označíme $C(z)$. Vzťah (1) upravíme vynásobením $N(N-1)(N-2)$ a odstráanením symetrie medzi $k-1$ a $N-k$ v sume a dostávame:

$$N(N-1)(N-2)C_N = (N+1)N(N-1)(N-2) + 12\sum_{k=1}^{N}(N-k)(k-1)C_{k-1}$$

vzťah ďalej upravíme

$$\sum_{N=0}^{\infty} N(N-1)(N-2)C_N = 24\sum_{N=0}^{\infty}\binom{N+1}{4} + 12\sum_{N=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{N}(N-k)(k-1)C_{k-1}$$

Využijeme fakt, že $C(z)$ je OGF postupnosti C_N a prvú sumu upravíme viacnásobným použitím *c)* z vety 1, druhú sumu zmeníme na základe vlastností kombinačných čísel, zmeníme jej priebeh a upravíme pomocou vzťahu (3). Tretiu sumu upravíme pomocou vzťahov (2), *c)* a *d)* z vety 1, čím dostávame

$$C'''(z) = \frac{24}{(1-z)^5} + 12\frac{C'(z)}{(1-z)^2} \tag{5}$$

obe strany vynásobíme $(1-z)^3$

$$(1-z)^3 C'''(z) = 12(1-z)C'(z) + \frac{24}{(1-z)^2}. \tag{6}$$

Definujeme si lineárny operátor

$$\Psi C(z) \equiv (1-z)\frac{d}{dz}C(z), \tag{7}$$

pomocou ktorého vzťah (6) prepíšeme na

$$\Psi(\Psi+1)(\Psi+2)C(z) = 12\Psi C(z) + \frac{24}{(1-z)^2} \tag{8}$$

Na ľavej strane nám 1, 2 predstavujú lineárne operátory, ktoré násobia funkciu príslušným číslom, operácia + je operácia s lineárnymi operátormi a operácia násobenia je aplikácia lineárneho operátoru na funkciu, ktorá je uzátvorkovaná zprava, príp. skladanie operátorov, pokiaľ by sme ju považovali za operáciu medzi operátormi. Tieto operácie sú asociatívne (operácia + je naviac komutatívna) a distributívne. Overenie prenecháme čitateľovi za cvičenie. Na základe týchto vlastností môžeme vzťah (8) ďalej upraviť

$$(\Psi^3+3\Psi^2+2\Psi)C(z)=12\Psi C(z)+\frac{24}{(1-z)^2}$$
$$(\Psi^3+3\Psi^2-10\Psi)C(z)=\frac{24}{(1-z)^2}$$
$$\Psi(\Psi+5)(\Psi-2)C(z)=\frac{24}{(1-z)^2}$$

Pololožme ďalej

$$U(z)=(\Psi+5)(\Psi-2)C(z)$$
$$T(z)=(\Psi-2)C(z)$$

Tým dostávame sústavu obyčajných diferrenciálnych rovníc

$$\Psi U(z)=\frac{24}{(1-z)^2}$$
$$(\Psi+5)T(z)=U(z)$$
$$(\Psi-2)C(z)=T(z)$$

Po úprave máme

$$U'(z)=\frac{24}{(1-z)^3}$$
$$T'(z)=-5\frac{T(z)}{1-z}+\frac{U(z)}{(1-z)}$$
$$C'(z)=2\frac{C(z)}{1-z}+\frac{T(z)}{1-z}$$

Z podmienok $C_0=C_1=C_2=0$, z bodu *c)* vety 1 a faktu, že $C(z)=\sum_{N=1}^{\infty}C_N z^N$ dostaneme podmienky pre riešenie sústavy $U(0)=T(0)=C(0)=0$. Riešenie prvej rovnice získame priamym integrovaním. Po dosadení výsledku do druhej rovnice spočítame $T(z)$ a analogicky $C(z)$ a dostaneme výsledky

$$U(z)=\frac{12}{(1-z)^2}-12$$
$$T(z)=\frac{12}{7}\frac{1}{(1-z)^2}-\frac{12}{5}+\frac{24}{35}(1-z)^5$$
$$C(z)=\frac{12}{7}\frac{1}{(1-z)^2}\ln\frac{1}{1-z}-\frac{54}{49}\frac{1}{(1-z)^2}+\frac{6}{5}-\frac{24}{245}(1-z)^5$$

Máme teda

$$\sum_{N=1}^{\infty}C_N z^N=C(z)=\frac{12}{7}\frac{1}{(1-z)^2}\ln\frac{1}{1-z}-\frac{54}{49}\frac{1}{(1-z)^2}+\frac{6}{5}-\frac{24}{245}(1-z)^5$$

Pomocou vety 1 a vzťahov (2) a (4) dostaneme koeficienty C_N

$$C_N\doteq\frac{12}{7}(N+1)(H_{N+1}-\frac{23}{14})\quad pre\ N\geq 6$$

Jiný příklad – Mergesort:

rekurentní vztah pro složitost je $T_N = 2T_{N/2} + N$, $T_1 = 0$

nechť $N = 2^k$, pak se to dá přepsat jako

$$T_{2^k} = 2T_{2^{k-1}} + 2^k$$

označím $c_k = T_{2^k}$ a mám rekurzi $c_k = 2c_{k-1} + 2^k$

z toho

$$\sum_{k\geq 1} c_k x^k = 2x \sum_{k\geq 1} c_{k-1} x^{k-1} + \sum_{k\geq 1} 2^k x^k$$

$$C(x) = 2x\,C(x) + \frac{2x}{1-2x}$$

$$C(x) = \frac{2x}{(1-2x)^2}$$

Koeficienty c_k se zase dají vypočítat jako $c_k = \frac{C^{(k)}(0)}{k!}$,

vyjde $c_k = k\cdot 2^k$

Ověření: vytvořující fce posloupnosti $k\cdot 2^k$ je

$$\sum_{k\geq 0} k\cdot 2^k x^k = \sum_{k\geq 0} k\,(2x)^k = x\Big(\sum_{k\geq 0} (2x)^k\Big)' = x\left(\frac{1}{1-2x}\right)' =$$

$$= x\cdot\frac{2}{(1-2x)^2}$$

(Motwani, Raghavan)

Jiný způsob analýzy (pro randomizovaný Quicksort)

počítáme počet porovnávání

nechť X_{ij} je náhodná veličina, která nabývá hodnot

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{když prvky } i \text{ a } j \text{ se během výpočtu porovnávají} \\ 0 & \text{když ne} \end{cases}$$

nechť $P(X_{ij} = 1) = p_{ij}$, $P(X_{ij} = 0) = 1 - p_{ij}$

celkový počet porovnávání je $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} X_{ij}$

očekávaný —"—

$$E \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} X_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} E X_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} p_{ij}$$

stačí tedy vypočítat $p_{ij} = P(i \text{ a } j \text{ se budou porovnávat})$

Při výpočtu vzniká náhodný binární vyhledávací strom, kořen je náhodně vybraný dělicí prvek, menší prvky patří do levého podstromu, větší do pravého. Struktura levého a pravého podstromu se tvoří rekurzivně.

a) Kořen se porovnává s prvky obou podstromů.

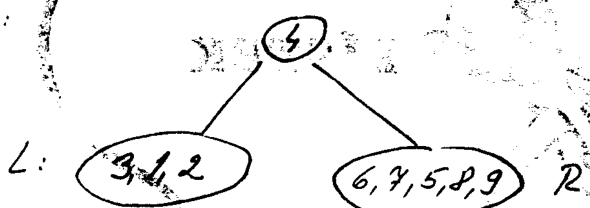
b) Neporovnávají se prvky levého podstromu s prvky pravého podstromu

c) Prvky i a j se porovnávají, pouze když jeden je předek druhého.

Příklad: třídím permutaci $\{3, 4, 6, 1, 2, 7, 5, 8, 9\}$

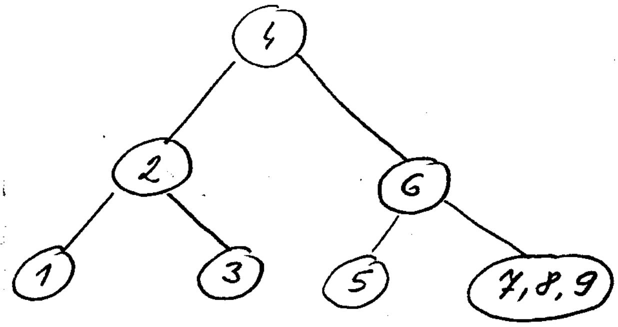
náhodně vyberu dělicí prvek - nechť je to 4

dostanu:



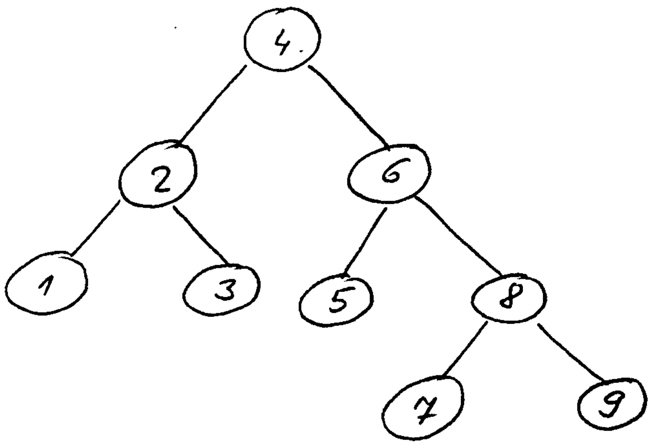
dále vyberu v levé části dělicí bod 2, v pravé 6

dostanu:



... tady vyberu 8

výsledek:



Vytvořím permutaci π vrcholů T tak, že procházím hladiny v rostoucím pořadí, v každé hladině prvky zleva doprava

dostanu $\pi = \{4, 2, 6, 1, 3, 5, 8, 7, 9\}$

Jak poznám, které prvky se porovnávají?

Platí: i a j se porovnávají $\Longleftrightarrow$ i nebo j se v permutaci π vyskytuje dřív než každé l takové, že $i < l < j$

důkaz: Kdyby existovalo l mezi i a j tak, že by leželo před oběma z nich, znamenalo by to, že toto l je už rozdělilo do svého levého a pravého podstromu

např. 6 a 3 se neporovnává, protože 4 leží před oběma z nich
6 a 9 se porovnává, protože 6 leží před 7 a 8

$p_{ij} = P(i \text{ a } j \text{ se porovnávají}) = P(i \text{ leží v } \pi \text{ první z prvků } i, i+1, \dots, j) + P(j \text{ leží v } \pi \text{ první z prvků } i, i+1, \dots, j)$

Každý z prvků $i, i+1, \dots, j$ má stejnou pst, že bude prvním z nich, $p = \frac{1}{j-i+1}$.

proto $p_{ij} = \frac{2}{j-i+1}$

očekávaný počet porovnávání:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} \frac{2}{j-i+1} \le \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n-i+1} \frac{2}{k} \le 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 2n H_n \sim n \log n$$